Оглавление

Элементы векторной алгебры

Линейные геометрические объекты

Элементы векторной алгебры

1. Векторы

1.1. Основные понятия

Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются *скалярными*. Например, площадь, длина, объем, работа и т. д.

Другие величины определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Например, сила, скорость и т. д. Такие величины называют *векторными*.

Вектор – это направленный отрезок прямой, т. е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.

Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, или $\vec{a}$.

У вектора $\overrightarrow{AB}$ A – начало вектора, а B – конец вектора.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ (B – начало вектора, а A – конец вектора) называется ***противоположным*** вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Длина, или ***модуль*** $\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\right)$ вектора $\overrightarrow{AB}$, – длина отрезка AB.

Нулевой вектор $(\vec{0})$ – вектор, длина которого равна нулю. Направления нулевой вектор не имеет.

Единичный вектор $(\vec{e})$ – вектор, длина которого равна единице.

Орт вектора $\vec{a}$ $(\vec{a}^0)$ – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными*** $(\vec{a} \parallel \vec{b})$, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Если коллинеарные векторы направлены в одну сторону, то они называются ***сонаправленными*** $(\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b})$.

Если коллинеарные векторы направлены в разные стороны, то они называются ***противоположно направленными*** ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$).

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными*** ($\vec{a}=\vec{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и их длины равны.

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

1.2. Линейные операции над векторами

Сложение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$. От точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$.

Вектор $\overrightarrow{OB}$ (рис. 1.1), соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется ***суммой векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$.

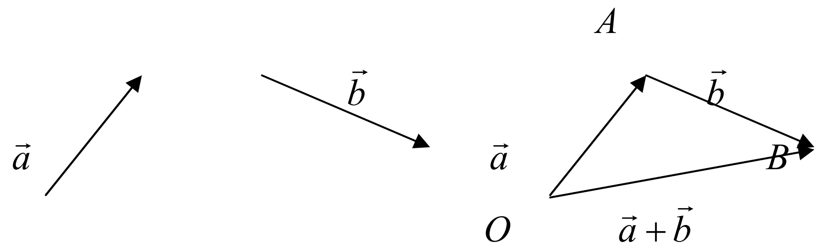


Рис. 1.1

Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника*.

Сумму двух неколлинеарных векторов можно найти также по *правилу параллелограмма* (рис. 1.2).

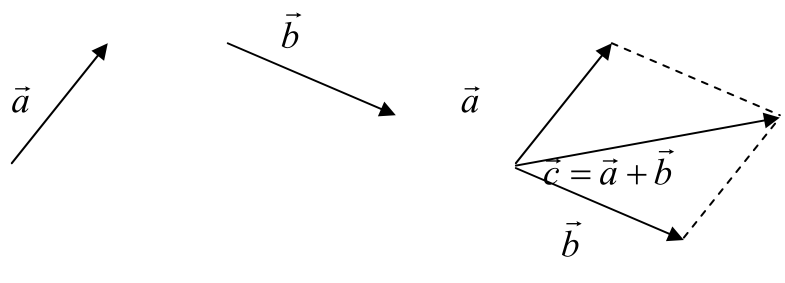


Рис. 1.2

Можно складывать несколько векторов. Например, сложение трех векторов показано на рис. 1.3.

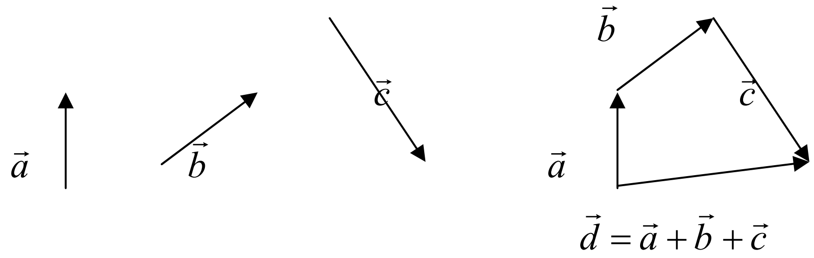


Рис. 1.3

Разность векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ (рис. 1.4), соединяющий конец второго вектора с концом первого, называется ***разностью векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$.

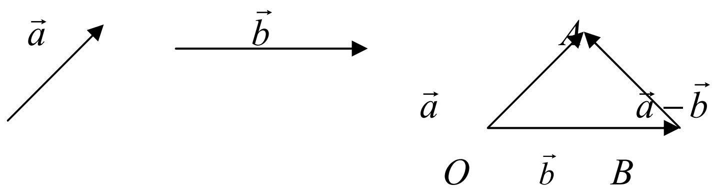


Рис. 1.4

Произведение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ ***на число*** (скаляр) λ называется вектор $\lambda \cdot \vec{a}$, который имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Например, векторы $2\vec{a}$ и $-2\vec{a}$ имеют вид, как на рис. 1.5.

Рис. 1.5

Из определения произведения вектора на число следуют свойства:

1) если $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, то $\vec{b} \parallel \vec{a}$. Наоборот, если $\vec{b} \parallel \vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$, то при некотором λ верно равенство $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$;

2) всегда $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$, т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Свойства линейных операций

Рассмотрим следующие свойства линейных операций:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

3) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \vec{a}$;

4) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{a}$;

5) $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$.

1.3. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось *l*.

Проекцией точки *A* ***на ось*** *l* называется основание A_1 перпендикуляра AA_1, опущенного из точки на ось.

Точка A_1 – это точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку *A* перпендикулярно оси (рис. 1.6).

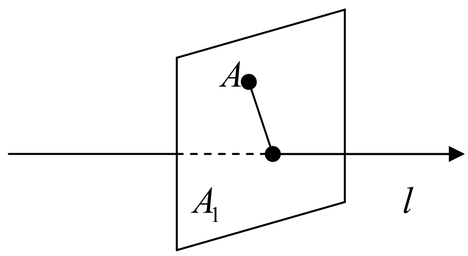


Рис. 1.6

Если точка A лежит на оси l, то проекция точки A на ось совпадает с точкой A.

Пусть $\overrightarrow{AB}$ – произвольный вектор ($\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$). Пусть A_1 и B_1 – проекции на ось l соответственно начала A и конца B вектора $\overrightarrow{AB}$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ ***на ось*** l называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены, и отрицательное число $\left(-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|\right)$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены (рис. 1.7).

Обозначение – $\text{пр}_l\overrightarrow{AB}$.

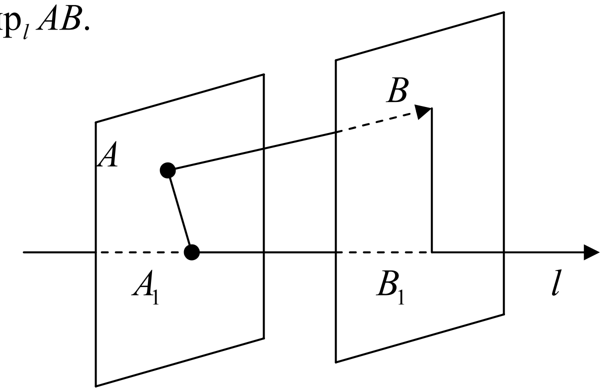


Рис. 1.7

Если точки A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ равна 0.

Угол φ между вектором $\vec{a}$ и осью l (рис. 1.8) изменяется от 0 до π, т. е. $0 \leq \varphi \leq \pi$.

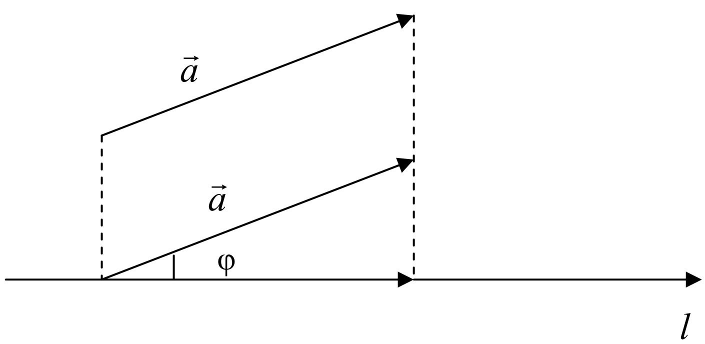


Рис. 1.8

Основные свойства проекций

Перечислим свойства проекций.

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т. е.

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi.$$

2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось. Например, для трех векторов:

$$\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_l\vec{a} + \text{пр}_l\vec{b} + \text{пр}_l\vec{c}.$$

3. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т. е.

$$\text{пр}_l(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_l\vec{a}.$$

1.4. Разложение вектора по ортам координатных осей

Пусть в пространстве задана система координат $Oxyz$. На координатных осях Ox, Oy, Oz выделим единичные векторы (орты) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно (рис. 1.9).

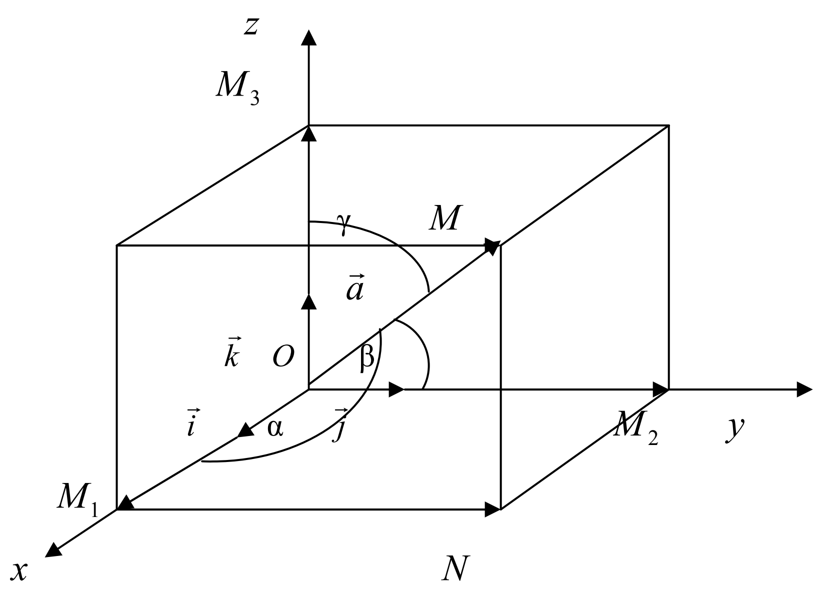


Рис. 1.9

Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор пространства, причем его начало совпадает с началом системы координат $Oxyz$, т. е. $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

Проведем через конец вектора $\overrightarrow{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2, M_3. Получим прямоугольный параллелепипед (рис. 1.9).

Найдем проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси:

$$\text{пр}_x\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|, \quad \text{пр}_y\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right|, \quad \text{пр}_z\vec{a} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right|.$$

Используя определение суммы нескольких векторов, выразим вектор $\vec{a}$ через векторы $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM},$$

$$\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{OM_2}, \quad \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_3},$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \tag{1.1}$$

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$:

$$\overrightarrow{OM_1} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{OM_2} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right| \cdot \vec{j}, \quad \overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right| \cdot \vec{k}. \tag{1.2}$$

Обозначим проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на оси Ox, Oy, Oz соответственно через $a_x,\ a_y,\ a_z$, т. е.

$$\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = a_x, \quad \left|\overrightarrow{OM_2}\right| = a_y, \quad \left|\overrightarrow{OM_3}\right| = a_z. \tag{1.3}$$

Подставляя (1.2) и (1.3) в (1.1), получим

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}. \tag{1.4}$$

Эта формула называется ***разложением вектора по ортам координатных осей***. Числа $a_x,\ a_y,\ a_z$ называются ***координатами вектора*** $\vec{a}$.

Равенство (1.4) часто записывают в виде:

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}.$$

Найдем модуль вектора $\vec{a}$. Используем теорему о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда:

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2,$$

или

$$\left|\vec{a}\right|^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2, \qquad (1.5)$$

тогда

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2},$$

т. е. модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями координат равны соответственно α, β, γ. По свойству проекций вектора на ось имеем

$$a_x = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha; \quad a_y = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta; \quad a_z = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\gamma. \qquad (1.6)$$

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}.$$

Числа $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ называют ***направляющими косинусами*** вектора $\vec{a}$.

Подставим выражения (1.6) в (1.5), получим

$$\left|\vec{a}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \cdot \cos^2\alpha + \left|\vec{a}\right|^2 \cdot \cos^2\beta + \left|\vec{a}\right|^2 \cdot \cos^2\gamma.$$

Сократим на $\left|\vec{a}\right|^2 \neq 0,$ получим соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

т. е. сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.

З а м е ч а н и е

Координаты единичного вектора $\vec{e}$ – это направляющие косинусы, т. е.

$$\vec{e} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma).$$

П р и м е р 1. 1

Найти орт вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$ и направляющие косинусы определяемого им направления.

Решение. Находим длину вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Следовательно, направляющие косинусы будут равны:

$$\cos\alpha = \frac{3}{13}, \ \cos\beta = \frac{4}{13}, \ \cos\gamma = -\frac{12}{13}.$$

Так как координаты орта вектора – это направляющие косинусы, то

$$\vec{a}^0 = \frac{3}{13}\vec{i} + \frac{4}{13}\vec{j} - \frac{12}{13}\vec{k}.$$

1.5. Действия над векторами, заданными проекциями

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$.

При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются):

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\}.$$

При умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это число:

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}.$$

Два вектора $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ ***равны*** тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ***коллинеарны*** и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, где λ – некоторое число, т. е.

$$\{a_x; a_y; a_z\} = \lambda\{b_x; b_y; b_z\} = \{\lambda b_x; \lambda b_y; \lambda b_z\}.$$

Отсюда

$$a_x = \lambda b_x; \quad a_y = \lambda b_y; \quad a_z = \lambda b_z;$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \lambda; \quad \frac{a_y}{b_y} = \lambda; \quad \frac{a_z}{b_z} = \lambda;$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Итак, проекции коллинеарных векторов пропорциональны.

П р и м е р 1. 2

Найти координаты вектора $4\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$, если

$$\vec{a} = \{1;\ 3;\ -2\},\ \vec{b} = \{0;\ 2;\ 1\},\ \vec{c} = \{5;\ 1;\ 4\}.$$

Решение. Подставим координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ в линейную комбинацию $4\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ и выполним алгебраические операции умножения вектора на число и сложения векторов:

$$\begin{aligned} 4\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} &= 4\{1;\ 3;\ -2\} + 2\{0;\ 2;\ 1\} - 3\{5;\ 1;\ 4\} = \\ &= \{4;\ 12;\ -8\} + \{0;\ 4;\ 2\} - \{15;\ 3;\ 12\} = \\ &= \{-11;\ 13;\ -18\}. \end{aligned}$$

Итак, $4\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c} = \{-11;\ 13;\ -18\}$.

1.6. Координаты точки и вектора

Координаты точки

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Возьмем точку A и построим вектор $\overrightarrow{OA}$. Вектор $\overrightarrow{OA}$ называется ***радиус-вектором*** точки A и обозначается $\vec{r}$, т. е. $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$. ***Координаты точки*** A – это координаты ее радиус-вектора $\vec{r} = \{x;\ y;\ z\}$, т.е. $A(x;\ y;\ z)$.

Координаты вектора

Путь даны две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ есть разность векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (рис. 1.10).

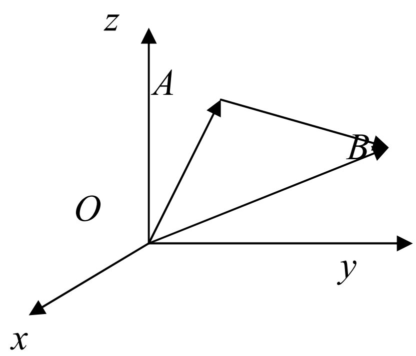


Рис. 1.10

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$$

Итак, координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}.$$

1.7. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi. \tag{1.7}$$

Скалярное произведение обозначается

$$\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \text{или} \quad (\vec{a}, \vec{b}).$$

Формулу (1.7) можно представить в следующем виде:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \cdot \vec{a},$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором.

Свойства скалярного произведения

Перечислим свойства скалярного произведения.

1. Переместительное свойство:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

2. Сочетательное свойство относительно скалярного множителя:

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a}\vec{b}).$$

3. Распределительное свойство:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

4. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, т. е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

5. Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$\text{если } \vec{a} \perp \vec{b}, \text{ то } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Справедливо и обратное утверждение:

$$\text{если } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ и } \vec{a} \neq 0 \neq \vec{b}, \text{ то } \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Выразим скалярное произведение через координаты векторов $\vec{a} = \{a_x;\, a_y;\, a_z\}$ и $\vec{b} = \{b_x;\, b_y;\, b_z\}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \{a_x;\, a_y;\, a_z\} \cdot \{b_x;\, b_y;\, b_z\} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$= a_x b_x \vec{i}\vec{i} + a_x b_y \vec{i}\vec{j} + a_x b_z \vec{i}\vec{k} + a_y b_x \vec{j}\vec{i} + a_y b_y \vec{j}\vec{j} + a_y b_z \vec{j}\vec{k} + a_z b_z \vec{k}\vec{i} + a_z b_y \vec{k}\vec{j} + a_z b_z \vec{k}\vec{k} =$$

$$= a_x b_x + 0 + 0 + 0 + a_y b_y + 0 + 0 + 0 + a_z b_z,$$

$$\text{т. е. } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Итак, скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

П р и м е р 1. 3

Найти угол между векторами $\vec{a} = \{4;\, -10;\, 1\}$ и $\vec{b} = \{11;\, -8;\, -7\}$.

Решение. Из формулы (1.7) найдем $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 11 + (-10)\cdot(-8) + 1\cdot(-7) = 117,$$

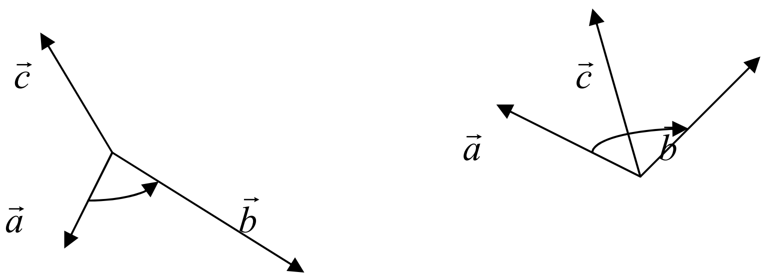
$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-10)^2 + 1^2} = \sqrt{117}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{11^2 + (-8)^2 + (-7)^2} = \sqrt{234}.$$

Итак, $\cos\alpha = \dfrac{117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^0.$$

1.8. Векторное произведение векторов

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют ***правую тройку***, если при взгляде с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден против хода часовой стрелки, и ***левую***, если по часовой (рис. 1.11).



правая тройка левая тройка

Рис. 1.11

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;
2) модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними, т. е.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi;$$

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение обозначается

$$\vec{a} \times \vec{b}, \quad \text{или} \quad [\vec{a}, \vec{b}].$$

Из определения векторного произведения вытекают соотношения между ортами:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Свойства векторного произведения

Приведем свойства векторного произведения.

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}).$$

2. Сочетательное свойство относительно скалярного множителя:

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}).$$

3. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

4. Распределительное свойство:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

5. Геометрический смысл векторного произведения: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на них:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\text{пар.}} \text{ (рис. 1.12).}$$

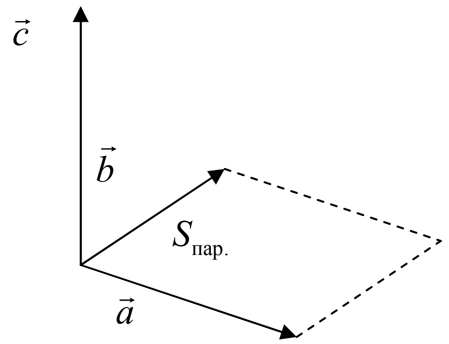


Рис. 1.12

Выразим векторное произведение через координаты:

$$\vec a \times \vec b = (a_x\vec i + a_y\vec j + a_z\vec k)\times(b_x\vec i + b_y\vec j + b_z\vec k) =$$
$$= a_xb_x(\vec i\times\vec i) + a_xb_y(\vec i\times\vec j) + a_xb_z(\vec i\times\vec k) + a_yb_x(\vec j\times\vec i) + a_yb_y(\vec j\times\vec j) + a_yb_z(\vec j\times\vec k) +$$
$$+ a_zb_x(\vec k\times\vec i) + a_zb_y(\vec k\times\vec j) + a_zb_z(\vec k\times\vec k) =$$
$$= \vec 0 + a_xb_y\vec k - a_xb_z\vec j - a_yb_x\vec k + \vec 0 + a_yb_z\vec i + a_zb_x\vec j - a_zb_y\vec i + \vec 0 =$$
$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec i - (a_xb_z - a_zb_x)\vec j + (a_xb_y - a_yb_x)\vec k =$$
$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec k,$$

т. е. $\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec k.$

Полученную формулу можно записать сокращенно:

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

П р и м е р 1. 4

Даны векторы $\vec a = \{1; -2; 2\}$ и $\vec b = \{3; 0; -4\}$. Найти площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Решение. Найдем векторное произведение $\vec a$ и $\vec b$:

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \vec i\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \vec j\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + \vec k\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 8\vec i + 10\vec j + 6\vec k.$$

$$S_{\text{пар.}} = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{8^2+10^2+6^2} = 10\cdot\sqrt{2}.$$

1.9. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $\vec{a}\times\vec{b}$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$.

Смешанное произведение обозначается

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}, \quad \text{или} \quad (\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

Сначала выполняется векторное произведение, а затем скалярное.

Свойства смешанного произведения

Рассмотрим свойства смешанного произведения.

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т. е.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$$

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

3. Смешанное произведение меняет знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т. е.

$$\vec{a}\,\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\,\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

4. Если $\vec{a}\,\vec{b}\vec{c}=0$, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Обратное тоже верно: если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то $\vec{a}\,\vec{b}\vec{c}=0$.
5. Если $\vec{a}\,\vec{b}\vec{c}>0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ правая, если $\vec{a}\,\vec{b}\vec{c}<0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ левая.

6. Геометрический смысл векторного произведения: модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 1.13), т. е.

$$V_{\text{парал}} = \left|\vec{a}\,\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Выразим смешанное произведение через координаты.

Пусть заданы векторы

$$\vec{a} = \{a_x;\, a_y;\, a_z\},\ \vec{b} = \{b_x;\, b_y;\, b_z\},\ \vec{c} = \{c_x;\, c_y;\, c_z\}.$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} \right)\cdot(c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot c_z.$$

Полученную формулу можно записать в виде:

$$\vec{a}\,\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

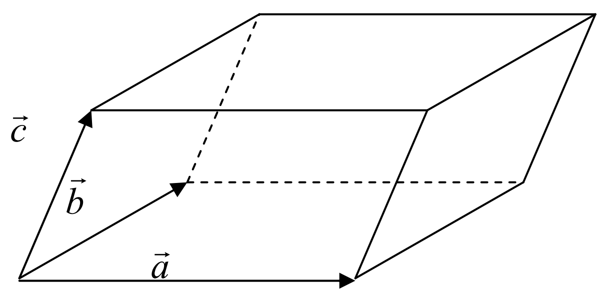


Рис. 1.13

П р и м е р 1. 5

Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках

$$O(1;\,1;2),\ A(2;\,3;\,-1),\ B(2;\,-2;\,4),\ C(-1;\,1;\,3).$$

Решение. Объем тетраэдра $OABC$ равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, т. е.

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} V_{\text{парал}} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC} \right|.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{OA} = \{1;\,2;\,-3\}, \quad \overrightarrow{OB} = \{1;\,-3;\,2\}, \quad \overrightarrow{OC} = \{-2;\,0;\,1\}.$$

$$\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 - 10 + 18 = 5.$$

Итак, $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6}.$

1.10. Векторное пространство. Базис

Векторным (линейным) пространством называется множество L, состоящее из элементов любой природы (называемых ***векторами***), в котором определены операции сложения элементов и умножения элементов на действительные (комплексные) числа, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $x + y = y + x$ – коммутативность сложения;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ – ассоциативность сложения;
3) существует нулевой вектор 0, удовлетворяющий условию $x + 0 = x$ для любого вектора x;
4) для любого вектора x существует противоположный ему вектор $(-x)$ такой, что $x + (-x) = 0$, где 0 – нулевой вектор;
5) $1 \cdot x = x$ для любого вектора x, где 1– число;
6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ – ассоциативность умножения;

7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ – дистрибутивность относительно операции сложения чисел;

8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ – дистрибутивность относительно операции сложения векторов.

x, y – векторы; α, β – действительные (комплексные) числа.

Например, линейными пространствами являются: множество всех многочленов степени не выше n; множество квадратных матриц порядка n, множество всех векторов 3-мерного пространства, множество векторов n-мерного пространства (векторы этого пространства – упорядоченные системы из n действительных чисел, т.е. $\overline{x}=(x_1, x_2, \ldots x_n)$) с определенными в каждом из этих случаев соответствующим образом операциями сложения элементов и умножения их на числа.

Вектор x называется ***линейной комбинацией векторов*** $a_1, a_2, \ldots, a_m$ векторного пространства, если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$:

$$x=\lambda a_{11}+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_m a_m.$$

Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ векторного пространства L называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_m a_m=0. \tag{1.8}$$

Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ векторного пространства L называются ***линейно независимыми***, если равенство (1.8) справедливо лишь при

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0.$$

Например, два неколлинеарных вектора $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ линейно независимы, т. к. $\lambda_1\overline{x}_1+\lambda_2\overline{x}_2=0$ выполняется только тогда, когда $\lambda_1=\lambda_2=0,$ ибо если, например, $\lambda_2\neq 0,$ то $\overline{x}_2=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\overline{x}_1$ и векторы $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ коллинеарны.

Максимальная совокупность линейно независимых векторов линейного пространства называется его ***базисом***.

Линейное пространство L называется ***n-мерным***, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые системы из $(n+1)$ вектора уже являются зависимыми. Число n называется ***размерностью пространства*** L и обозначается $\dim(L)$. Другими словами, ***размерность пространства*** – это максимально возможное число линейно независимых векторов в данном пространстве.

Любая совокупность n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в n-мерном пространстве L образует базис этого пространства.

Теорема. *Каждый вектор x из пространства L может быть единственным образом представлен как линейная комбинация базисных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$*

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n. \tag{1.9}$$

Равенство (1.9) называется ***разложением вектора*** x ***по базису*** $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координатами вектора x относительно этого базиса.

П р и м е р 1. 6

Показать, что векторы $\vec{a} = \{3;\,4;\,3\}$, $\vec{b} = \{-2;\,3;\,1\}$, $\vec{c} = \{4;\,-2;\,3\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d} = \{-17;\,18;\,-7\}$ в этом базисе.

Решение. Составим матрицу A из координат векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -17 & -9 \\ 0 & -30 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -17 & -9 \\ 0 & 0 & 49/17 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(A)=3.$$

Так как ранг равен трем, то векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы и, значит, образуют базис.

Разложим вектор $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}, \text{ или}$$

$$\{-17;18;-7\}=\alpha\{3;4;3\}+\beta\{-2;3;1\}+\gamma\{4;-2;3\}.$$

Последнее векторное равенство равносильно системе линейных уравнений:

$$\begin{cases}3\alpha-2\beta+4\gamma=-17,\\ 4\alpha+3\beta-2\gamma=18,\\ 3\alpha+\beta+3\gamma=-7.\end{cases}$$

Решая систему, находим $\alpha=1,\ \beta=2,\ \gamma=-4.$

Итак, координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $\{1;2;-4\}$, т. е.

$$\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}-4\vec{c}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти длину вектора $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$ и его направляющие косинусы.

   Ответ: $|\vec{a}|=7;\ \cos\alpha=\dfrac{2}{7};\ \cos\beta=\dfrac{3}{7};\ \cos\gamma=\dfrac{-6}{7}.$

2. Найти координаты вектора $\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$, если

$$\vec{a}=\{2;3;0\},\ \vec{b}=\{0;-3;-2\},\ \vec{c}=\{1;1;-1\}.$$

   Ответ: $\left\{3;\dfrac{11}{2};0\right\}.$

3. Определить угол между векторами $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.

   Ответ: $\cos\varphi=\dfrac{2}{7}.$

4. Даны вершины треугольника $A(4;1;0)$, $B(2;2;1)$, $C(6;3;1)$. Найти проекцию стороны AB на сторону AC.

   Ответ: $-\dfrac{1}{3}$.

5. Дан треугольник с вершинами $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;2;1)$. Найти его площадь.

   Ответ: $2\sqrt{22}$.

6. Даны вершины тетраэдра $O(-5;-4;8)$, $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины O на грань ABC.

   Указание. Найти объем тетраэдра и площадь S грани ABC и воспользоваться формулой $V=\dfrac{1}{3}Sh$.

   Ответ: 11.

7. Показать, что векторы $\vec{a}=\{2;1;0\}$, $\vec{b}=\{1;-1;2\}$, $\vec{c}=\{2;2;-1\}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}=\{3;7;-7\}$ в этом базисе.

   Ответ: $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

Линейные геометрические объекты

2. Прямая на плоскости

2.1. Уравнения прямой на плоскости

Любой ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный прямой l, называется ***нормальным вектором прямой*** l (рис. 2.1).

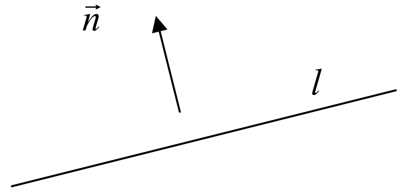


Рис. 2.1

Фиксированная точка – точка, положение которой на фигуре зафиксировано.

Текущая точка – точка, положение которой на фигуре не зафиксировано, т. е. произвольная точка фигуры.

Пусть

$\vec{n} = \{A; B\}$ – нормальный вектор прямой l;

$P_0(x_0, y_0)$ – фиксированная точка прямой;

$P(x, y)$ – произвольная точка плоскости;

$\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки P_0;

$\vec{r}$ – радиус-вектор точки P.

Тогда $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ (рис. 2.2).

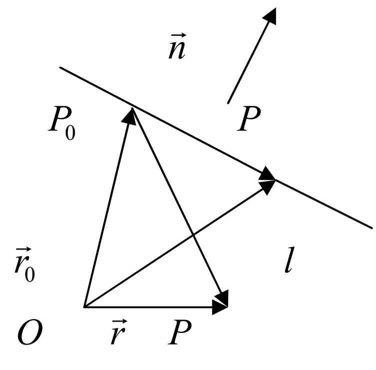


Рис. 2.2

Если точка $P(x, y)$ принадлежит прямой, т. е. является текущей точкой прямой, то $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$. Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$, или

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \qquad (2.1)$$

Если точка $P(x, y)$ не принадлежит прямой, то условие (2.1) не выполняется, т. к. векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{P_0P}$ не перпендикулярны.

Уравнение (2.1) – ***уравнение прямой в векторной форме***.

Подставим в уравнение (2.1) координаты векторов $\vec{n} = \{A;\ B\}$ и $\overrightarrow{P_0P} = \{x - x_0;\ y - y_0\}$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (2.2)$$

Уравнение (2.2) – ***уравнение прямой, проходящей через данную точку*** $P_0(x_0, y_0)$ ***перпендикулярно данному вектору*** $\vec{n}$.

В уравнении (2.2) раскроем скобки:

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0.$$

Пусть $C = -Ax_0 - By_0$, тогда

$$Ax + By + C = 0. \qquad (2.3)$$

Уравнение (2.3) – ***общее уравнение прямой***.

Пусть на плоскости Oxy задана произвольная прямая l, непараллельная оси Oy. Ее положение определяется ординатой b точки $A(0;\ b)$ и углом $\alpha\,(0 \le \alpha \le \pi)$ между прямой и осью Ox (рис. 2.3).

Возьмем на прямой точку $B(x;\ y)$ и опустим из нее на ось Ox перпендикуляр. Через точку $A(0;\ b)$ проведем прямую, параллельную оси Ox.

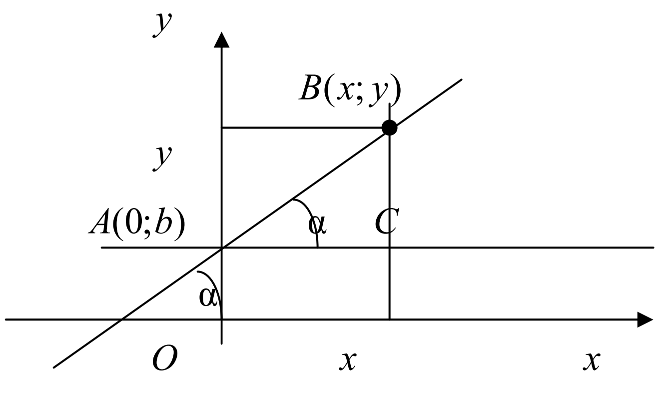


Рис. 2.3

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y-b}{x}$. Отсюда

$$y = \mathrm{tg}\alpha \cdot x + b.$$

Введем обозначение $\mathrm{tg}\alpha = k$ (k называется ***угловым коэффициентом прямой***). В итоге

$$y = kx + b. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) – ***уравнение прямой с угловым коэффициентом.***

З а м е ч а н и я

1) Если $b = 0$, то $y = kx$.

2) Если $l \parallel Ox$, то $y = b$.

3) Если $l \parallel Oy$, то $x = a$ – прямая отсекает на оси Ox отрезок a.

Пусть прямая проходит через точку $P_0(x_0;\, y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k. Так как точка $P_0(x_0;\, y_0)$ принадлежит прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой (2.4), т. е. $y_0 = kx_0 + b$. Отсюда $b = y_0 - kx_0$. Подставим значение b в уравнение (2.4), получим

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) – ***уравнение прямой, проходящей через данную точку*** $P_0(x_0;y_0)$ ***в данном направлении***.

Пусть прямая проходит через две точки $P_1(x_1;\, y_1)$ и $P_2(x_2;\, y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точку P_1, имеет вид:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2.6}$$

Так как прямая проходит через точку P_2, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению, т. е.

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Отсюда находим $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставим найденное значение k в уравнение (2.6):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2.7)$$

Уравнение (2.7) – ***уравнение прямой, проходящей через две точки*** $P_1(x_1;\, y_1)$ ***и*** $P_2(x_2;\, y_2)$.

Пусть прямая пересекает ось Ox в точке $P_1(a;\, 0)$, а ось Oy в точке $P_2(0;\, b)$ (рис. 2.4).

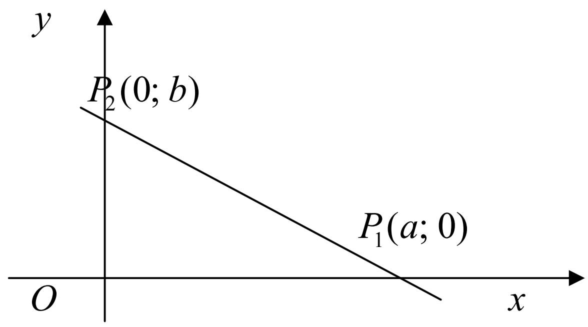


Рис. 2.4

Уравнение (2.7) примет вид: $\dfrac{y - 0}{b - 0} = \dfrac{x - a}{0 - a}$, т. е.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2.8)$$

Уравнение (2.8) – ***уравнение прямой в отрезках***.

Полярная система координат

Полярная система координат задается точкой O, называемой ***полюсом***, и лучом Op, называемым ***полярной осью*** (рис. 2.5).

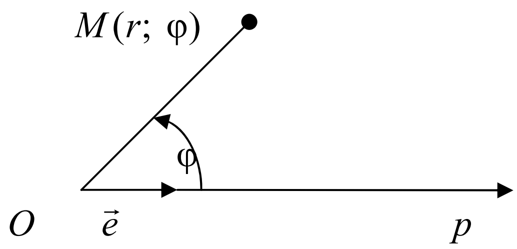


Рис. 2.5

Возьмем на плоскости точку M, не совпадающую с O. Положение точки M определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (отсчет углов ведется в направлении, противоположном движению часовой стрелки).

Числа r и φ называются ***полярными координатами*** точки M, пишут $M(r;\varphi)$, при этом r называют ***полярным радиусом***, φ – ***полярным углом***.

Установим связь между прямоугольными и полярными координатами. Совместим полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось – с положительной полуосью Ox. Пусть x и y – прямоугольные координаты точки M, а r и φ – ее полярные координаты (рис. 2.6).

Прямоугольные координаты точки M выражаются через полярные координаты следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

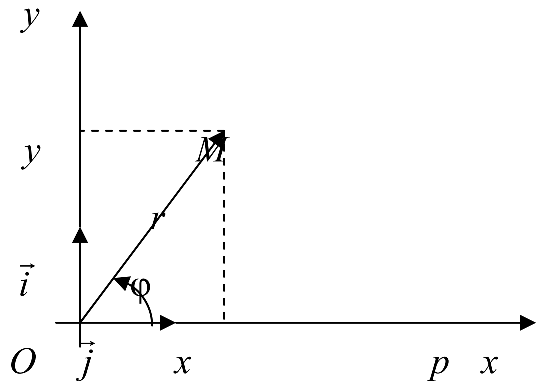


Рис. 2.6

Полярные же координаты точки M выражаются через ее декартовые координаты по формулам:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \text{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0. \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ при } x = 0,\ y > 0.$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ при } x = 0,\ y < 0.$$

Полярное уравнение прямой

Рассмотрим прямую l в полярной системе координат. Введем дополнительные обозначения: m – расстояние от полюса O до прямой; α – угол между полярной осью Op и осью k, проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой.

Пусть точка M принадлежит прямой, тогда ее координаты определяются двумя значениями: r – расстоянием от точки до полюса и φ – углом между отрезком OM и полярной осью Op, т. е. $M(r;\varphi)$ (рис. 2.7).

Для любой точки $M(r;\varphi)$ на данной прямой имеем:

$$\text{пр}_k \overrightarrow{OM} = m.$$

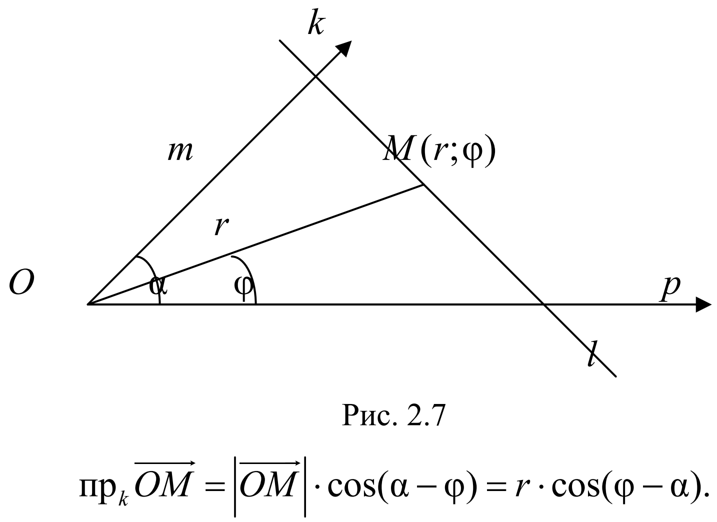


Рис. 2.7

$$\text{пр}_k \overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cdot \cos(\alpha - \varphi) = r \cdot \cos(\varphi - \alpha).$$

Следовательно,

$$r\cos(\varphi-\alpha)=m. \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) – ***уравнение прямой в полярной системе координат***.

Нормальное уравнение прямой

Пусть прямая задана в полярной системе координат уравнением (2.9). Введем декартовую систему координат Oxy, совместив полюс O с началом O системы и полярную ось Op с осью Ox (рис. 2.8).

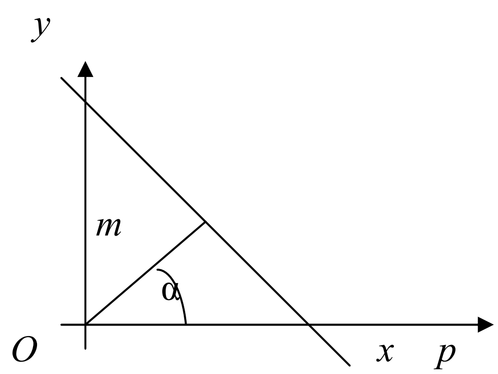


Рис. 2.8

Рассмотрим уравнение (2.9):

$$r\cos(\varphi-\alpha)-m=0,$$

$$r\cos\varphi\cos\alpha+r\sin\varphi\sin\alpha-m=0.$$

Используем формулы, связывающие прямоугольные и полярные координаты:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi. \end{cases}$$

Получим уравнение

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-m=0. \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) называется ***нормальным уравнением прямой***.

З а м е ч а н и е

Общее уравнение прямой (2.3) можно привести к нормальному уравнению (2.10), умножив обе части уравнения (2.3) на нормирующий множитель

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

где знак берется противоположным знаку свободного члена C в общем уравнении прямой.

2.2. Взаимное расположение прямых на плоскости

Пусть заданы две прямые

$$l_1:\ y = k_1x + b_1;$$
$$l_2:\ y = k_2x + b_2.$$

Угол между прямыми

Найдем угол φ, на который надо повернуть в положительном направлении прямую l_1 вокруг точки пересечения прямых до совпадения с прямой l_2. Построим график, изображенный на рис. 2.9.

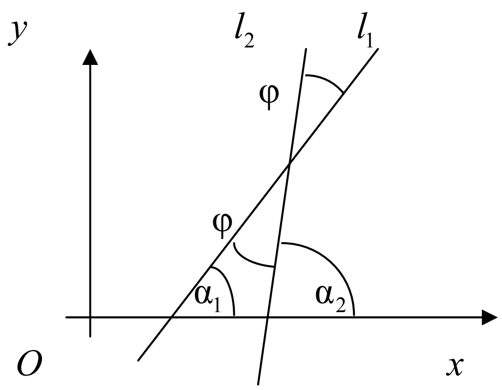


Рис. 2.9

По теореме о внешнем угле треугольника имеем

$$\alpha_2 = \varphi + \alpha_1 \quad \text{или} \quad \varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_1\mathrm{tg}\alpha_2}.$$

Так как $\mathrm{tg}\alpha_1 = k_1$, $\mathrm{tg}\alpha_2 = k_2$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (2.11)$$

Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая – второй, то правая часть формулы (2.11) берется по модулю, т. е.

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Условие параллельности прямых

Если прямые параллельны, то $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0.$ Из формулы (2.11) следует $k_2 - k_1 = 0,$ т. е.

$$k_2 = k_1.$$

Итак, если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны.

Условие перпендикулярности прямых

Если прямые перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0.$ Отсюда $1 + k_1 k_2 = 0,$ т. е.

$$k_1 k_2 = -1.$$

Таким образом, условием перпендикулярности прямых является равенство $k_1 k_2 = -1.$

П р и м е р 2. 1

Дан треугольник ABC с вершинами $A(6;\, 5)$, $B(5;\, -4)$, $C(-5;\, 4)$. Найти:

1) уравнение прямой AB;

2) уравнение высоты CN, опущенной из вершины C;

3) уравнение медианы AM, проведенной из вершины A.

Решение

1. Используем уравнение прямой, проходящей через две точки,

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A},$$

получим

$$\frac{y-5}{-4-5}=\frac{x-6}{5-6}, \text{ или } 9x-y-49=0.$$

$$AB:\ 9x-y-49=0.$$

2. Найдем уравнение высоты CN. Поскольку $CN\perp AB$, постольку используем угловой коэффициент прямой AB для нахождения углового коэффициента прямой CN. Так как $AB:\ 9x-y-49=0$, или $y=9x-49$, то угловой коэффициент $k_{AB}=9$.

$$k_{AB}k_{CN}=-1,\ k_{CN}=-\frac{1}{9}.$$

Уравнение прямой CN найдем по угловому коэффициенту k_{CN} и точке C:

$$y-y_C=k_{CN}(x-x_C),$$

$$y-4=-\frac{1}{9}(x+5),$$

$$x+9y-31=0.$$

$$CN:\ x+9y-31=0.$$

3. Уравнение медианы AM найдем, используя уравнение прямой, проходящей через две точки A и $M(x_M;\,y_M)$:

$$\frac{y-y_A}{y_M-y_A}=\frac{x-x_A}{x_M-x_A}.$$

Координаты точки M – это координаты середины отрезка BC:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2},\ y_M=\frac{y_B+y_C}{2},$$

$$x_M=0,\ y_M=0.$$

Уравнение медианы AM примет вид:

$$\frac{y-5}{0-5}=\frac{x-6}{0-6},$$

$$5x-6y=0.$$

$$AM: \ 5x - 6y = 0.$$

2.3. Расстояние от точки до прямой

Пусть задана прямая l: $Ax + By + C = 0$ и точка $P_0(x_0; y_0)$ (рис. 2.10).

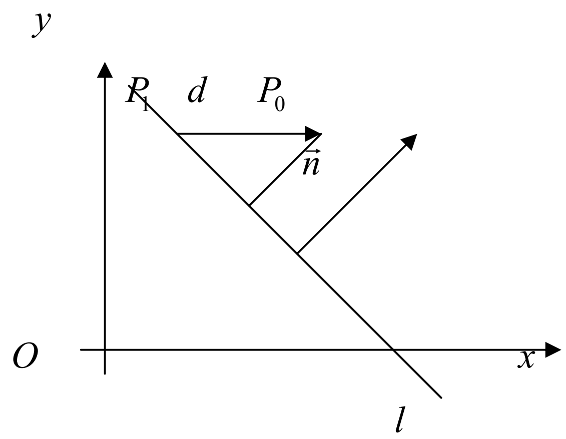


Рис. 2.10

Расстояние d от точки P_0 до прямой l равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{P_1P_0}$, где $P_1(x_1; y_1)$ – произвольная точка прямой l, на направление нормального вектора $\vec{n} = \{A; B\}$. Следовательно,

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\, \overrightarrow{P_1P_0}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| =$$

$$= \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка $P_1(x_1; y_1)$ принадлежит прямой, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, т. е. $C = -Ax_1 - By_1$. Поэтому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить острый угол между прямыми $5x - y + 7 = 0,\ 2x - 3y + 1 = 0.$

   Ответ: 45^0.

2. Показать, что прямые $2x - 5y + 7 = 0,\ 5x + 2y + 8 = 0$ перпендикулярны.

3. Дан треугольник ABC с вершинами $A(1;\,-2),\ B(21;\,-12),\ C(13;\,4).$

   Найти:

   1) уравнение прямой AB;

   2) уравнение высоты CN, опущенной из вершины C;

   3) уравнение медианы AM, проведенной из вершины A.

   Ответ: 1) $x + 2y + 3 = 0;$ 2) $2x - y - 22 = 0;$ 3) $x + 8y + 15 = 0.$

4. Найти расстояние между прямыми $3x + 4y - 15 = 0,\ 6x + 8y + 5 = 0.$

   Ответ: $3{,}5$.

3. Плоскость

3.1. Уравнения плоскости

Любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости, называется ***нормальным вектором плоскости***.

Пусть

$\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}$ – нормальный вектор плоскости π;

$P_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – фиксированная точка плоскости;

$P(x;\ y;\ z)$ – произвольная точка пространства;

$\overrightarrow{P_0P} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\}$;

$\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки P_0;

$\vec{r}$ – радиус-вектор точки P;

$\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$ (рис. 3.1).

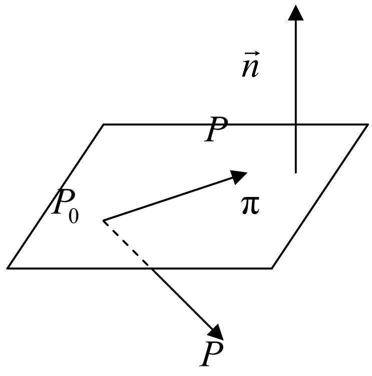


Рис. 3.1

Если точка P принадлежит плоскости, то векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{P_0P}$ перпендикулярны. Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, значит,

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \tag{3.1}$$

Если точка $P(x;\ y;\ z)$ не принадлежит плоскости, то условие (3.1) не выполняется.

Уравнение (3.1) – ***уравнение плоскости в векторной форме***.

Выразим скалярное произведение $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P}$ через координаты векторов:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) – ***уравнение плоскости, проходящей через данную точку*** $P_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ ***перпендикулярно данному вектору*** $\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}$.

Раскроем скобки в уравнении (3.2)

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$$

и обозначим $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, тогда получим

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (3.3)$$

Уравнение (3.3) – ***общее уравнение плоскости***.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть $P_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $P_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, $P_3(x_3;\, y_3;\, z_3)$, – три точки плоскости π, не лежащие на одной прямой. $P(x;\, y;\, z)$ – текущая точка плоскости (рис. 3.2).

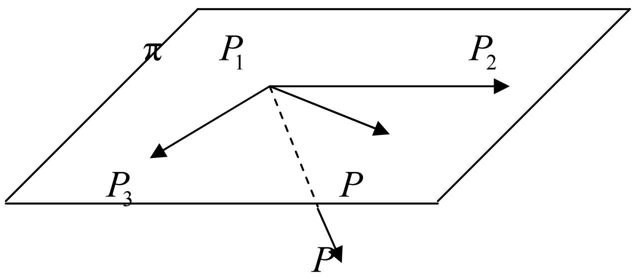


Рис. 3.2

Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{P_1P} = \{x - x_1;\, y - y_1;\, z - z_1\},$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \{x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1\},$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = \{x_3 - x_1;\, y_3 - y_1;\, z_3 - z_1\}.$$

Если точка $P(x;\, y;\, z)$ принадлежит плоскости, то векторы $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ лежат в одной плоскости, т. е. они компланарны. Так как векторы компланарны, то их смешанное произведение равно нулю: $\overrightarrow{P_1P}\,\overrightarrow{P_1P_2}\,\overrightarrow{P_1P_3} = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.4)$$

Уравнение (3.4) – ***уравнение плоскости, проходящей через три точки***.

П р и м е р

Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(0;-1;1)$, $A_2(3;5;1)$, $A_3(1;-3;-1)$.

Решение. Воспользуемся уравнением (3.4):

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 3 & 5+1 & 1-1 \\ 1 & -3+1 & -1-1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-12x + 6(y+1) - 12(z-1) = 0,$$
$$2x - y + 2z - 3 = 0.$$

Уравнение плоскости, походящей через точки A_1, A_2, A_3, имеет вид:

$$2x - y + 2z - 3 = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy, Oz соответственно отрезки a, b, c, т. е. проходит через точки $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$– рис. (3.3).

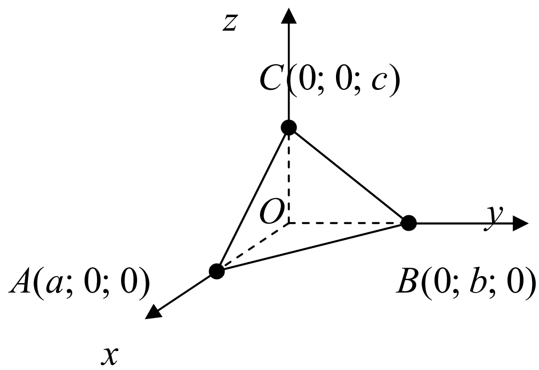


Рис. 3.3

Подставляя координаты точек A, B, C в уравнение (3.4), получаем

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, имеем

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3.5)$$

Уравнение (3.5) – ***уравнение плоскости в отрезках***.

Нормальное уравнение плоскости

Положение плоскости π вполне определяется заданием единичного вектора $\vec{e}$, имеющего направление перпендикуляра OK, опущенного на плоскость из начала координат, и длиной m этого перпендикуляра (рис. 3.4).

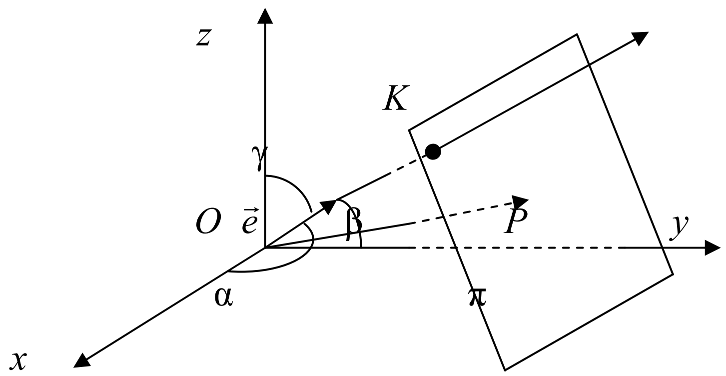


Рис. 3.4

Пусть α, β, γ – углы, образованные единичным вектором $\vec{e}$ с осями Ox, Oy, Oz, значит,

$$\vec{e} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}.$$

Возьмем точку $P(x; y; z)$, принадлежащую плоскости. При любом положении точки P на плоскости проекция радиус-вектора $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ на направление вектора $\vec{e}$ всегда равна m ($m = OK$): $\text{пр}_{\vec{e}}\vec{r} = m$, т. е. $\vec{r}\cdot\vec{e} = m$, или

$$\vec{r}\cdot\vec{e} - m = 0. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) – ***нормальное уравнение плоскости в векторной форме***.

Выразим скалярное произведение $\vec{r}\cdot\vec{e}$ через координаты векторов:

$$\vec{r}\cdot\vec{e} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в (3.6), получим

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - m = 0. \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) – ***нормальное уравнение плоскости в координатной форме***.

З а м е ч а н и е

Общее уравнение плоскости (3.3) можно привести к нормальному уравнению плоскости (3.8), умножив обе части уравнение (3.3) на нормирующий множитель

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где знак берется противоположным знаку свободного члена D общего уравнения плоскости (3.3).

3.2. Взаимное расположение плоскостей

Пусть даны две плоскости:

$$\pi_1: \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \ \ \vec{n}_1=\{A_1;\,B_1;\,C_1\};$$
$$\pi_2: \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \ \vec{n}_2=\{A_2;\,B_2;\,C_2\}.$$

Угол между плоскостями

Под углом между плоскостями π_1 и π_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Угол φ между нормальными векторами $\vec{n}_1=\{A_1;\,B_1;\,C_1\}$ и $\vec{n}_2=\{A_2;\,B_2;\,C_2\}$ плоскостей π_1 и π_2 равен одному из этих углов (рис. 3.5).

Поэтому $\cos\varphi=\dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}|_1\cdot|\vec{n}_2|}$, или

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{3.9}$$

Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части (3.9).

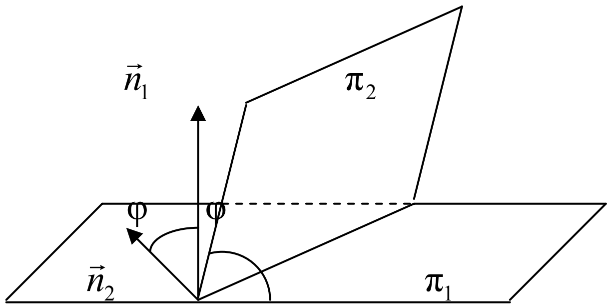


Рис. 3.5

Условие параллельности плоскостей

Если плоскости параллельны, то их нормальные векторы параллельны. Значит, координаты нормальных векторов пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{3.10}$$

Верно и обратное утверждение.

Выражение (3.10) есть условие параллельности плоскостей.

Условие перпендикулярности плоскостей

Если плоскости перпендикулярны, то их нормальные векторы тоже перпендикулярны, тогда $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0,$ т. е.

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{3.11}$$

Верно и обратное утверждение.

Выражение (3.11) есть условие перпендикулярности плоскостей.

Пусть даны три плоскости:

$$\pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \vec{n}_1 = \{A_1;\, B_1;\, C_1\};$$
$$\pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \vec{n}_2 = \{A_2;\, B_2;\, C_2\};$$
$$\pi_3: \ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \quad \vec{n}_3 = \{A_3;\, B_3;\, C_3\}.$$

Общие точки трех плоскостей определяются из системы:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е

Если нормальные векторы $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ некомпланарны, то три плоскости имеют единственную общую точку.

3.3. Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $P_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ и плоскость $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ (рис. 3.6).

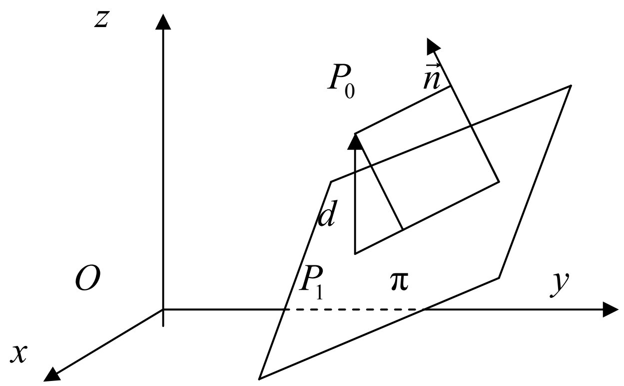


Рис. 3.6

Возьмем на плоскости точку $P_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$. Расстояние d от точки P_0 до плоскости π равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{P_1P_0}$ на направление нормального вектора $\vec{n} = \{A;\, B;\, C\}$:

$$d = \left|\text{пр}_{\vec{n}}\, \overrightarrow{P_1P_0}\right| = \left|\frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| =$$

$$= \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как точка P_1 принадлежит плоскости π, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Отсюда $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$. В итоге

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

З а м е ч а н и е

Если плоскость π задана уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - m = 0$, то расстояние от точки $P_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ до плоскости π может быть найдено по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - m|.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-2;\, 7;\, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z + 1 = 0$.

   Ответ: $x - 4y + 5z + 15 = 0.$

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;\, -15;\, 1)$, $M_2(3;\, 1;\, 2)$ перпендикулярно плоскости $3x - y - 4z = 0$.

   Ответ: $9x - y + 7z - 40 = 0.$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(3;\, -1;\, 2)$, $M_2(4;\, -1;\, -1)$, $M_3(2;\, 0;\, 2)$.

   Ответ: $3x + 3y + z - 8 = 0.$

4. Найти угол между плоскостями $2x - y + 2z + 15 = 0$ и $6x + 2y - 3z - 1 = 0$.

   Ответ: $\arccos\frac{4}{21}.$

5. Найти расстояние от точки $M_0(2;\, -1;\, -1)$ до плоскости $16x - 12y + 15z - 4 = 0$.

   Ответ: 1.

4. Прямая в пространстве

4.1. Уравнения прямой в пространстве

Направляющий вектор прямой – это любой ненулевой вектор, параллельный прямой.

Пусть

L – прямая;

$\vec{a} = \{m;\, n;\, p\}$ – направляющий вектор прямой;

$P_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ – фиксированная точка прямой;

$P(x;\, y;\, z)$ – произвольная точка пространства;

$\vec{r} = \{x;\, y;\, z\}$ – радиус-вектор точки P;

$\vec{r}_0 = \{x_0;\, y_0;\, z_0\}$ – радиус-вектор точки P_0 (рис. 4.1).

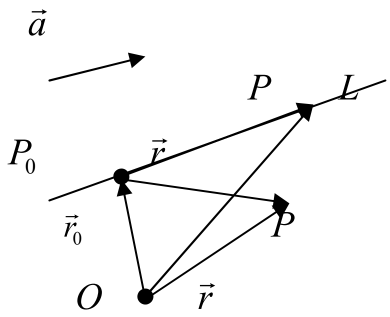


Рис. 4.1

Если точка P принадлежит прямой L, то $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{P_0P}$ коллинеарен направляющему вектору $\vec{a}$. Значит, найдется такое $t \in \mathbb{R}$, для которого $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}$ или

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}. \tag{4.1}$$

Если точка P не принадлежит прямой L, то условие (4.1) не выполняется.

Уравнение (4.1) называется ***векторным уравнением прямой***.

Рассмотрим векторы $\vec{r} - \vec{r}_0 = \{x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0\}$ и $t\vec{a} = \{tm;\, tn;\, tp\}$. Так как они равны, то равны их соответствующие координаты, т. е.

$$x - x_0 = tm; \qquad y - y_0 = tn; \qquad z - z_0 = tp \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases} \tag{4.2}$$

Уравнения (4.2) называются ***параметрическими уравнениями прямой***.

Из уравнений (4.2) можно исключить параметр t, если m, n, p - ненулевые числа. Поскольку

$$\frac{x-x_0}{m}=t, \qquad \frac{y-y_0}{n}=t, \qquad \frac{z-z_0}{p}=t,$$

получаем

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{4.3}$$

Уравнения (4.3) называются ***каноническими уравнениями прямой***.

З а м е ч а н и е

Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (4.3) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Например, уравнения $\frac{x-1}{0}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{4}$ задают прямую, проходящую через точку $P_0(1;\,-3;\,2)$ перпендикулярно оси Ox:

$$\begin{cases} x-1=0, \\ \frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{4}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=1, \\ 4y-3z+18=0. \end{cases}$$

Пусть $P_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ и $P_1(x_1, y_1, z_1)$ – фиксированные точки прямой L. В качестве направляющего вектора прямой возьмем вектор $\overrightarrow{P_0P_1}=\{x_1-x_0,\,y_1-y_0,\,z_1-z_0\}$ (рис. 4.2).

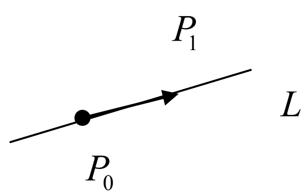


Рис. 4.2

Подставляя координаты $\overrightarrow{P_0P_1}$ в (4.3), получим

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{4.4}$$

Уравнения (4.4) называются ***уравнениями прямой, проходящей через две данные токи***.

Пусть заданы две непараллельные плоскости

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Пересечением этих плоскостей будет прямая, а координаты всех ее точек будут удовлетворять системе:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Система (4.5) называется ***общими уравнениями прямой в пространстве***.

З а м е ч а н и е

От общих уравнений (4.5) можно перейти к каноническим уравнениям прямой (4.3). Для этого достаточно найти какую-либо точку P_0 на прямой и направляющий вектор $\vec{a}$:

1) в качестве $P_0(x_0, y_0, z_0)$ можно взять любое решение системы (4.5);
2) за направляющий вектор $\vec{a}$ принять векторное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$, т. е.

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

П р и м е р. Написать канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + y + z - 2 = 0, \\ 2x - y - 3z + 6 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определим координаты какой-либо точки на прямой. Для этого положим в обоих уравнениях $z = 0$:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ 2x - y + 6 = 0. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -12 - 4 = -16;$$

$$x = \frac{4}{-4} = -1; \qquad y = \frac{-16}{-4} = 4.$$

Итак, $M_0(-1;\, 4;\, 0)$.

Направляющий вектор $\vec{a}$ определим как

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

где $\vec{n}_1 = \{x_1;\, y_1;\, z_1\}$ – нормальный вектор плоскости $2x + y + z - 2 = 0$;

$\vec{n}_2 = \{x_2;\, y_2;\, z_2\}$ – нормальный вектор плоскости $2x - y - 3z + 6 = 0$.

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot (-3 + 1) - \vec{j} \cdot (-6 - 2) + \vec{k} \cdot (-2 - 2) = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}.$$

$$\vec{a} = -2\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Канонические уравнения прямой найдем по формуле

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

где $\vec{a} = \{m;\, n;\, p\}$, $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$.

В итоге получим

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{8} = \frac{z}{-4} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z}{2}.$$

4.2. Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть даны две прямые:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad \vec{a}_1=\{m_1;\, n_1;\, p_1\};$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}, \quad \vec{a}_2=\{m_2;\, n_2;\, p_2\}.$$

Угол между прямыми

Угол между двумя прямыми – это угол между их направляющими векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|} \quad \text{или}$$

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Чтобы получить острый угол, нужно взять правую часть формулы по модулю.

Условие параллельности прямых

Если прямые параллельны, то параллельны их направляющие векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны, т. е.

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \tag{4.6}$$

Справедливо и обратное утверждение.

Выражение (4.6) есть условие параллельности прямых.

Условие перпендикулярности прямых

Если прямые перпендикулярны, то перпендикулярны их направляющие векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, тогда $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0$ или

$$m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0 \tag{4.7}$$

Справедливо и обратное утверждение.

Выражение (4.7) есть условие перпендикулярности прямых.

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать канонические уравнения прямой, походящей через точку $M_0(-1;1;-3)$ параллельно вектору $\{1;-3;4\}$.

   Ответ: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+3}{4}$.

2. Привести к каноническому виду уравнения прямой:

$$\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$$

   Ответ: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

3. Найти канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;1;-1)$ перпендикулярно плоскости $x-y+z+1=0$.

   Ответ: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$.

4. Найти угол между прямыми $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$ и $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$.

   Ответ: $\dfrac{\pi}{3}$.

5. Доказать, что прямые

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$$

   параллельны.

5. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть задано уравнение плоскости

$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$ и

канонические уравнения прямой

$$L: \ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

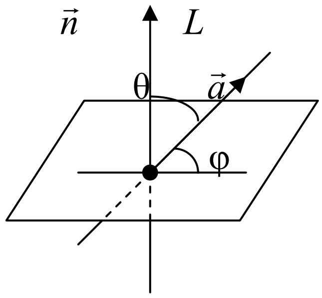


Рис. 5.1

$\vec{n} = \{A; B; C\}$ – нормальный вектор плоскости,

$\vec{a} = \{m; n; p\}$ – направляющий вектор прямой L.

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 5.1).

Пусть φ – угол между прямой и плоскостью, а θ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$, тогда

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}.$$

При этом $\sin\varphi = \pm\cos\theta$:

если $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, то $\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$, $\cos\theta \ge 0$;

если $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$, то $\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$, $\cos\theta < 0$.

Итак, при любых значениях $0 \le \theta \le \pi$ $\sin\varphi = |\cos\theta|$, тогда

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (5.1)$$

Условие параллельности прямой и плоскости

Если прямая параллельна плоскости, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, значит, $\vec{a}\cdot\vec{n}=0$ или

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{5.2}$$

Обратное утверждение тоже верно.

Уравнение (5.2) есть условие параллельности прямой и плоскости.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна плоскости, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$ параллельны, значит,

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{5.3}$$

Обратное утверждение тоже верно.

Выражение (5.3) есть условие перпендикулярности прямой и плоскости.

П р и м е р. Найти точку M', симметричную точке $M(0;-3;-2)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1{,}5}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

Решение

1. Найдем проекцию точки M на прямую.

Для этого составим уравнение плоскости, проецирующей точку M на данную прямую, т .е. проходящую через точку M перпендикулярно данной прямой:

$$A(x-x_M)+B(y-y_m)+C(z-z_M)=0,$$

где $(x_M;\, y_M;\, z_M)$ – координаты точки M; $\vec{n}=\{A;\, B;\, C\}$ – координаты нормального вектора плоскости (рис. 5.2).

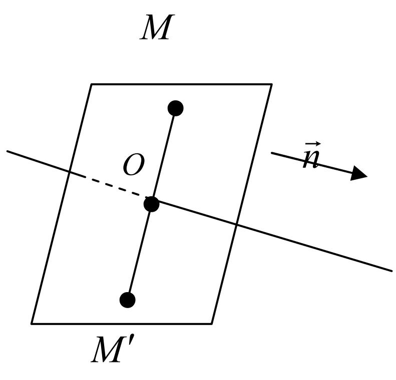


Рис. 5.2

В нашем случае вектор $\vec{n}$ – это направляющий вектор $\vec{a}$ прямой, т. е.

$$\vec{n}=\vec{a}=\{1;\,-1;\,1\}.$$

Получаем

$$1(x-0)-1(y+3)+1(z+2)=0\,,$$

$$x-y+z-1=0\,.$$

Решим следующую систему:

$$\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1{,}5}{-1}=\dfrac{z}{1}. \end{cases}$$

Параметрические уравнения прямой имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=-t+1{,}5, \\ z=t. \end{cases}$$

Подставим x, y, z в уравнение плоскости и найдем параметр t:

$$t+1+t-1{,}5+t-1=0,$$

$$3t=1{,}5, \qquad .$$

$$t=0{,}5.$$

Подставим найденный параметр t в параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x_0=0{,}5+1, \\ y_0=-0{,}5+1{,}5, \\ z_0=0{,}5, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_0=1{,}5, \\ y_0=1, \\ z_0=0{,}5. \end{cases}$$

$O(1{,}5;\ 1;\ 0{,}5)$ – проекция точки M на прямую.

2. Найдем координаты точки M'.

Точка O – середина отрезка MM'. Чтобы найти координаты точки M', используем формулы координат середины отрезка:

$$x_0=\frac{x_M+x_{M'}}{2}, \quad y_0=\frac{y_M+y_{M'}}{2}, \quad z_0=\frac{z_M+z_{M'}}{2}\ .$$

$$\begin{cases} x_{M'}=2x_0-x_M, \\ y_{M'}=2y_0-y_M, \\ z_{M'}=2z_0-z_M, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_{M'}=2\cdot 1{,}5-0=3, \\ y_{M'}=2\cdot 1+3=5, \\ z_{M'}=2\cdot 0{,}5+2=3. \end{cases}$$

Итак, $M'(3;\ 5;\ 3)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{-1}$ и точку $M(4;-3;2)$.

   Ответ: $9x+8y-6z=0$.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ и плоскости $x+2y+3z-19=0$.

   Ответ: $(4;3;3)$.

3. Найти проекцию точки $M(1;1;-1)$ на плоскость $3x+y+z+8=0$.

   Ответ: $(-2;0;-2)$.

4. Найти проекцию точки $M(1;2;8)$ на прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$.

   Ответ: $(3;-1;1)$.

5. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{-3}$ и плоскостью $6x-3y+2z=0$.

   Ответ: $\arcsin\frac{18}{91}$.

6. Доказать, что прямая $\begin{cases}2x-y+5=0,\\3y-4z-9=0\end{cases}$ и плоскость $4x+8y+6z-3=0$ параллельны.

Кривые второго порядка на плоскости

6. Кривые второго порядка

Линии (кривые) второго порядка на плоскости определяются уравнением

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F – коэффициенты уравнения (действительные числа), причем хотя бы одно из чисел A, B или C, отлично от нуля.

Например, простейшей кривой второго порядка является окружность:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

6.1. Парабола

Парабола – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой ***фокусом***, и от данной прямой, называемой ***директрисой***.

Введем систему координат Oxy. Опустим перпендикуляр из фокуса F на директрису параболы. Пусть точка A – точка пересечения этого перпендикуляра с директрисой AN. Направим ось Ox по этому перпендикуляру в направлении $\overrightarrow{AF}$, а ось Oy через середину отрезка AF (см. рис. 6.1). Расстояние от фокуса до директрисы обозначим через p ($p > 0$). Тогда координаты фокуса будут $F\left(\dfrac{p}{2};\, 0\right)$, а уравнение директрисы будет $x = -\dfrac{p}{2}$.

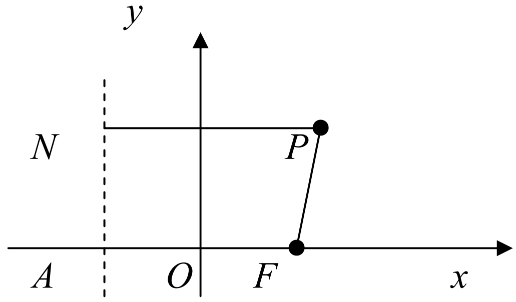


Рис. 6.1

Пусть $P(x;\, y)$ – произвольная точка параболы и $N\left(-\dfrac{p}{2};\, y\right)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки P на директрису, тогда

$$|NP| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|; \ |PF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

По определению параболы $|NP| = |PF|$, т. е.

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \tag{6.1}$$

Возведем в квадрат обе части равенства (6.1), получим

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}, \text{ т. е.}$$

$$y^2 = 2px. \tag{6.2}$$

Уравнение (6.2) называется ***каноническим уравнением параболы***.

Расстояние p от фокуса F до директрисы называется ***параметром*** параболы.

Ось Ox является ***осью симметрии параболы***, поскольку точки $P(x;\, y)$ и $P(x;\, -y)$ могут удовлетворять уравнению (6.2) только одновременно.

Так как $p > 0$, то из (6.2) следует, что $x \geq 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.

Если $x = 0$, то $y = 0$.

При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает (рис. 6.2).

Точка $O(0;0)$ называется ***вершиной параболы***, а отрезок $PF = r$ ***фокальным радиусом*** точки P.

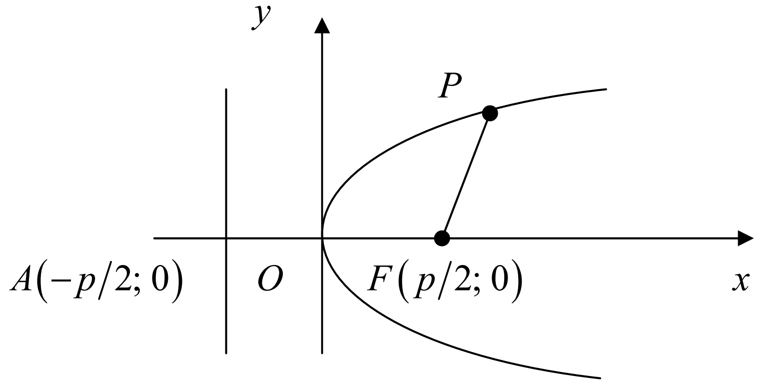


Рис. 6.2

Уравнение $y^2 = -2px$ также задает параболу с осью симметрии Ox, но с ветвями, направленными в сторону убывания x (рис. 6.3, *а*).

Если в качестве оси симметрии взять ось Oy, то, повторив предыдущие рассуждения, получим уравнения

$x^2 = 2py$ (рис. 6.3, *б*) и $x^2 = -2py$ (рис. 6.3, *в*).

Во всех случаях величина p положительна $(p > 0)$.

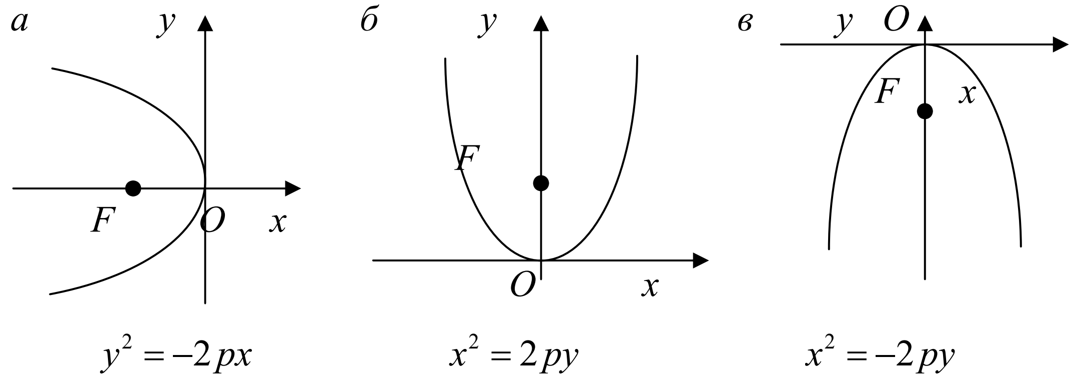


Рис. 6.3

6.2. Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами.

Пусть точки F_1 и F_2 – фокусы эллипса. Обозначим расстояние между фокусами $2c$, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов – через $2a$. По определению $2a > 2c$, т. е. $a > c$.

Выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: $F_1(-c;\,0)$ и $F_2(c;\,0)$ (рис. 6.4).

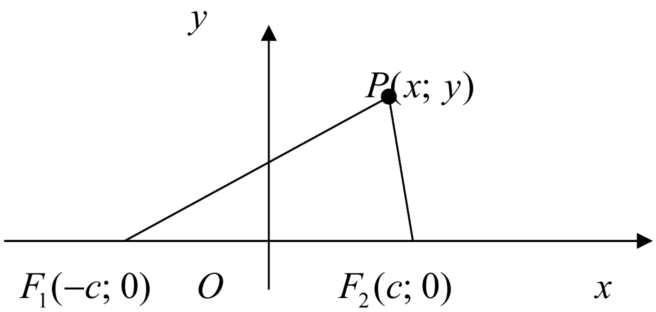


Рис. 6.4

Пусть $P(x;\,y)$ – произвольная точка эллипса, тогда, согласно определению эллипса,

$$PF_1 + PF_2 = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Преобразуем последнее уравнение:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx,$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Так как $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Пусть

$$a^2 - c^2 = b^2, \qquad (6.3)$$

тогда последнее уравнение имеет вид: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{6.4}$$

Уравнение (6.4) называется ***каноническим уравнением эллипса***.

Эллипс симметричен относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют ***центром эллипса*** (рис. 6.5).

Точки $A_1(a;\,0)$, $A_2(-a;\,0)$, $B_1(0;\,b)$, $B_2(0;\,-b)$ называются ***вершинами эллипса***.

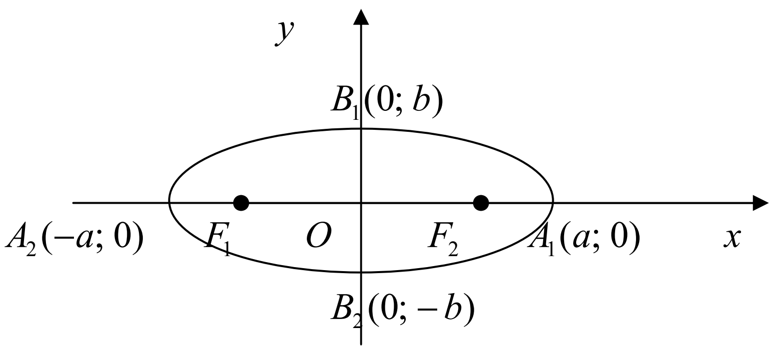


Рис. 6.5

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно ***большой и малой осями*** эллипса. Числа a и b называют соответственно ***большой и малой полуосями***.

Форма эллипса зависит от отношения $\frac{b}{a}$. При $b=a$ эллипс превращается в окружность и уравнение (6.4) принимает вид: $x^2+y^2=a^2$.

В качестве характеристики формы эллипса пользуются отношением $\frac{c}{a}$.

Отношение $\frac{c}{a}$ называется ***эксцентриситетом эллипса*** и обозначается буквой ε («эпсилон»):

$$\varepsilon=\frac{c}{a},$$

причем $0<\varepsilon<1$, т. к. $0<c<a$.

Чем меньше эксцентриситет эллипса, тем эллипс будет менее сплющенным; если $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.

Длины отрезков $PF_1 = r_1$ и $PF_2 = r_2$ называются ***фокальными радиусами*** точки P. Очевидно,

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Имеют место формулы

$$r_1 = a + \varepsilon x \text{ и } r_2 = a - \varepsilon x.$$

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются ***директрисами эллипса*** (рис. 6.6).

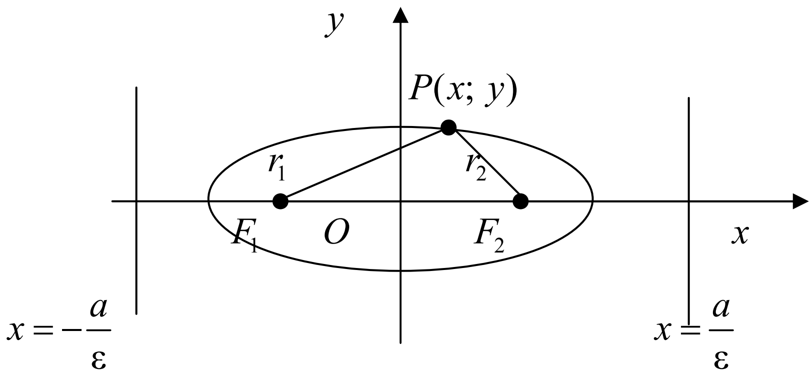


Рис. 6.6

Из равенства (6.3) следует, что $a > b$. Если же $a < b$, то уравнение (6.4) определяет эллипс, большая ось которого $2b$ лежит на оси Oy, а малая ось $2a$ – на оси Ox (рис. 6.7). Фокусы такого эллипса находятся в точках $F_1(0; c)$ и $F_2(0; -c)$, где $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

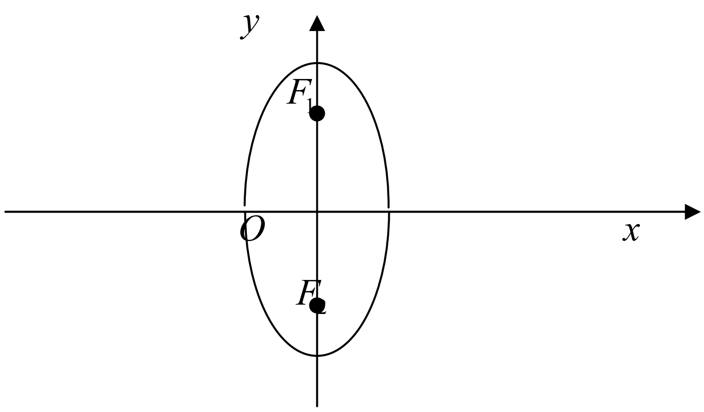


Рис. 6.7

6.3. Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть точки F_1 и F_2 – фокусы гиперболы. Обозначим расстояние между фокусами $2c$, а модуль разности расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов через $2a$. По определению $2a < 2c$, т. е. $a < c$.

Выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: $F_1(-c;\,0)$ и $F_2(c;\,0)$ (рис. 6.8).

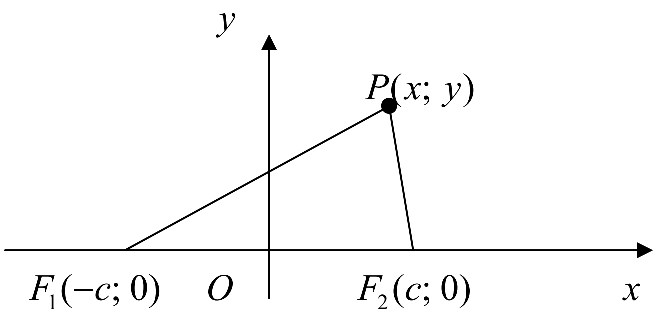


Рис. 6.8

Пусть $P(x;\,y)$ – произвольная точка гиперболы, тогда, согласно определению гиперболы,

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \text{ или } PF_1 - PF_2 = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

После упрощения последнего уравнения, получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (6.5)$$

где

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Уравнение (6.5.) называется ***каноническим уравнением гиперболы***.

Гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0;0)$, которую называют ***центром гиперболы*** (рис. 6.9).

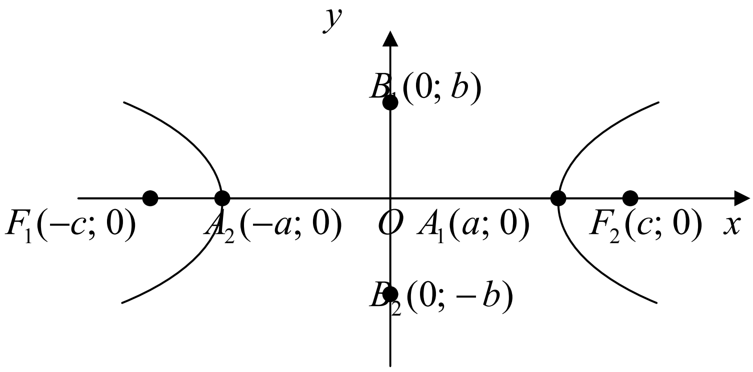


Рис. 6.9

Точки $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$ называются ***вершинами гиперболы***.

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно ***действительной и мнимой осями*** гиперболы. Числа a и b называют соответственно ***действительной и мнимой полуосями***.

Из уравнения (6.5) следует, что $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ или $|x| \geq a$. Это означает, что точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ (правая ветвь гиперболы) и слева от прямой $x = -a$ (левая ветвь гиперболы).

Асимптоты гиперболы

Прямая называется ***асимптотой*** неограниченной кривой, если расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки вдоль кривой от начала координат.

Гипербола (6.5) имеет две асимптоты:

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x \text{ (рис. 6.10).}$$

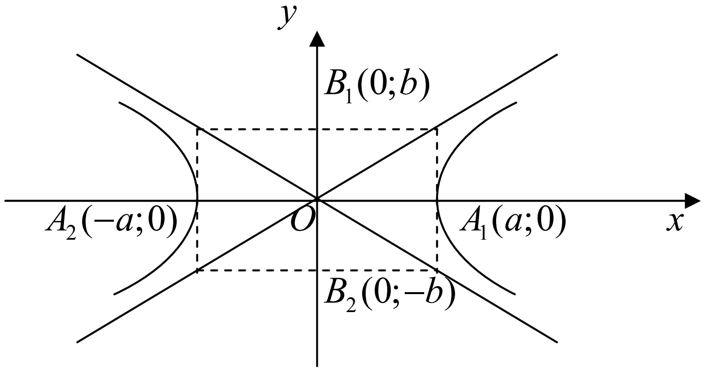


Рис. 6.10

Гипербола (6.5) называется ***равносторонней***, если ее полуоси равны, т. е. $a = b.$ Ее каноническое уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Отношение $\frac{c}{a}$ называется ***эксцентриситетом гиперболы*** и обозначается ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a},$$

причем $\varepsilon > 1,$ т. к. $c > a.$

Чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем гипербола будет более прижата к оси Ox.

Длины отрезков $PF_1 = r_1$ и $PF_2 = r_2$ (см. рис. 6.8) называются ***фокальными радиусами*** точки P. Фокальные радиусы для точек правой ветви гиперболы имеют вид

$$r_1 = \varepsilon x + a \text{ и } r_2 = \varepsilon x - a,$$

а для левой

$$r_1 = -(\varepsilon x + a) \text{ и } r_2 = -(\varepsilon x - a).$$

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются ***директрисами гиперболы*** (рис. 6.11).

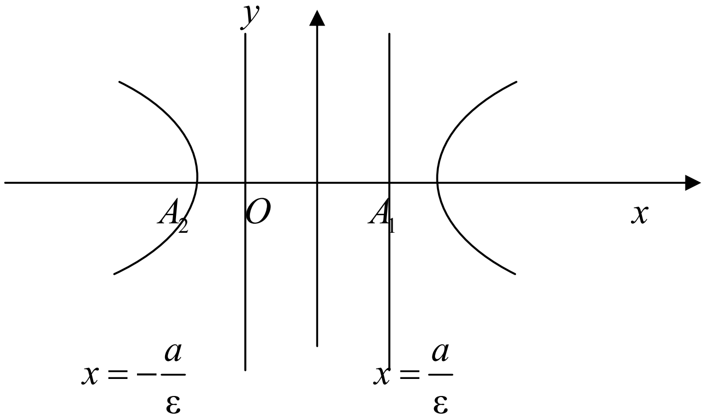


Рис. 6.11

Кривая, определяемая уравнением $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, также есть гипербола, действительная ось $2b$ которой расположена на оси Oy, а мнимая ось $2a$ – на оси Ox (рис. 6.12).

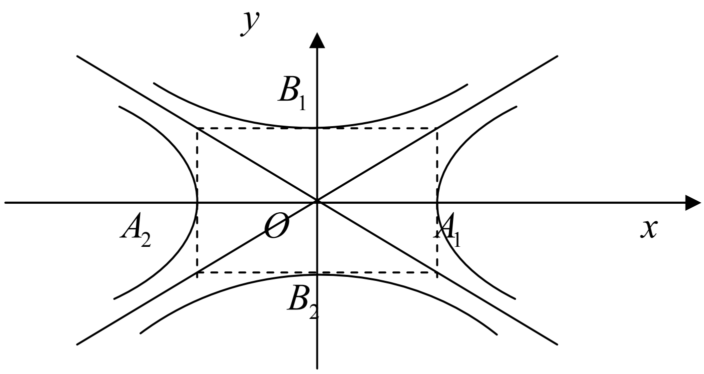


Рис. 6.12

Гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ имеют общие асимптоты и называются ***сопряженными.***

6.4. Преобразование системы координат

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называется *преобразованием системы координат*.

Параллельный перенос системы координат

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. Параллельный перенос осей координат – переход от системы координат Oxy к новой системе $O_1x_1y_1$, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными.

Пусть начало новой системы координат – точка O_1 – имеет координаты $(x_0; y_0)$ в старой системе координат Oxy, т. е. $O_1(x_0; y_0)$. Обозначим координаты произвольной точки P плоскости в системе Oxy через $(x; y)$, а в новой системе $O_1x_1y_1$ через $(x'; y')$ (рис. 6.13).

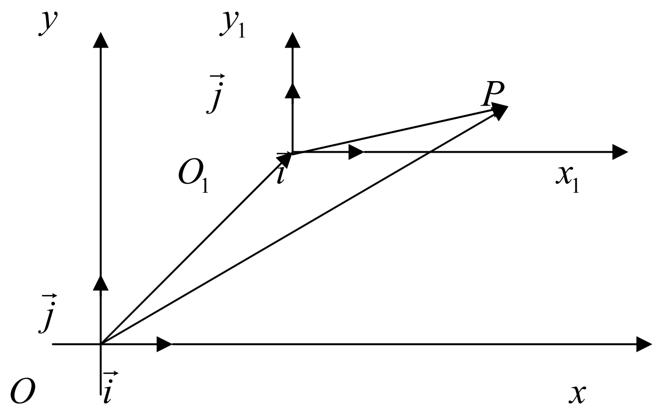


Рис. 6.13

Рассмотрим векторы

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \overrightarrow{OO_1} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}, \quad \overrightarrow{O_1P} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1P}$, то $x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}$ или

$$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + x')\vec{i} + (y_0 + y')\vec{j}.$$

Итак,

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases} \qquad (6.6)$$

Формулы (6.6) позволяют находить старые координаты x и y по известным новым x' и y' и наоборот.

Поворот осей координат

Поворот осей координат – это такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть новая система координат $O_1x_1y_1$ получена поворотом системы Oxy на угол α.

Пусть P – произвольная точка плоскости. Ее координаты в старой системе координат – $(x;\, y)$, а в новой – $(x';\, y')$.

Введем две полярные системы координат с общим полюсом O и полярными осями Ox и Ox_1. Полярный радиус r в обеих системах одинаков, а полярные углы соответственно равны $(\alpha + \varphi)$ и φ, где φ – полярный угол в новой полярной системе (рис. 6.14)

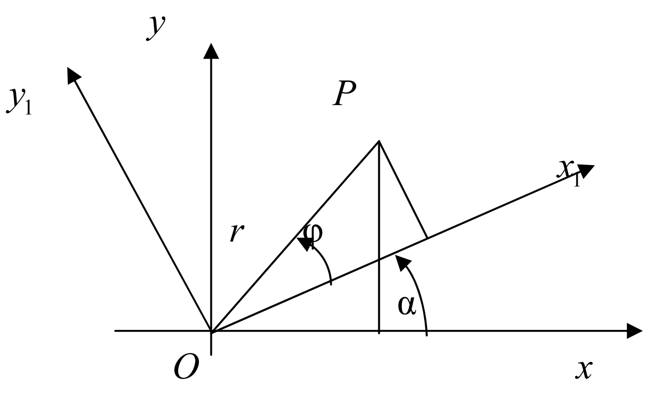


Рис. 6.14

Из формул перехода от полярных координат к прямоугольным имеем:

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos(\alpha+\varphi), \\ y = r\cdot\sin(\alpha+\varphi) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\alpha - r\cdot\sin\varphi\cdot\sin\alpha, \\ y = r\cdot\cos\varphi\cdot\sin\alpha + r\cdot\sin\varphi\cdot\cos\alpha. \end{cases}$$

Так как $x' = r\cos\varphi$ и $y' = r\sin\varphi$, то

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{6.7}$$

Формулы (6.7) называются ***формулами поворота осей***. Они позволяют определять старые координаты $(x;\, y)$ произвольной точки P через новые координаты $(x';\, y')$ этой же точки и наоборот.

Если новая система координат $O_1x_1y_1$ получена из старой Oxy путем параллельного переноса осей координат и последующим поворотом осей на угол α, то старые координаты x и y произвольной точки выражаются через ее новые координаты x' и y' по формулам:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

6.5. Уравнения кривых второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям

Пусть центр эллипса находится в точке $O_1(x_0;\, y_0)$. Его оси симметрии параллельны координатным осям Ox и Oy, а полуоси соответственно равны a и b. Поместим в центре эллипса O_1 начало новой системы координат $O_1x_1y_1$, оси которой O_1x_1 и O_1y_1 параллельны соответствующим осям Ox и Oy и одинаково с ними направлены. В новой системе координат уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Используя формулы (6.6), получим

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Аналогично рассуждая, получим:

- уравнение гиперболы с центром в точке $O_1(x_0;\, y_0)$ и полуосями a и b

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$

- уравнения парабол с вершиной в точке $O_1(x_0;\, y_0)$

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0), \qquad (y-y_0)^2=-2p(x-x_0),$$
$$(x-x_0)^2=2p(y-y_0), \qquad (x-x_0)^2=-2p(y-y_0).$$

П р и м е р 6. 1. Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением

$$9x^2+16y^2-90x+32y+97=0.$$

Решение. Группируем члены, содержащие только x и только y, вынося коэффициенты при x^2 и y^2 за скобку:

$$9(x^2-10x)+16(y^2+2y)+97=0.$$

Дополняем выражения в скобках до полных квадратов:

$$9(x^2-2\cdot 5\cdot x+25-25)+16(y^2+2y+1-1)+97=0,$$
$$9\left[(x-5)^2-25\right]+16\left[(y+1)^2-1\right]+97=0,$$
$$9(x-5)^2+16(y+1)^2-225-16+97=0,$$
$$9(x-5)^2+16(y+1)^2-144=0.$$

Перенесем свободный член вправо и разделим на него:

$$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1.$$

Итак, получили уравнение эллипса с центром в точке $(5;\,-1)$, полуосями $a=4$, $b=3$.

П р и м е р 6. 2. Определить вид кривой $32x^2+52xy-7y^2+180=0$.

Решение. Перейдем в уравнении к переменным x' и y', используя формулы

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Подставим данные соотношения в уравнение, получим

$$32(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + 52(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) -$$

$$-7(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 + 180 = 0.$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены и приравняем к нулю коэффициент при $x'y'$. Получим следующее уравнение:

$$26\text{tg}^2\varphi + 39\text{tg}\varphi - 26 = 0.$$

Определим угол поворота φ:

$$\text{tg}\varphi = -2; \ \varphi = \text{arctg}(-2).$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin\varphi = \frac{\text{tg}\varphi}{\sqrt{1+\text{tg}^2\varphi}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Преобразования поворота принимает вид:

$$\begin{cases} x = x'\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}} + y'\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \\ y = -x'\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} + y'\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Подставим найденные x, y в исходное уравнение, получим,

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Итак, получили уравнение гиперболы.

Задачи для самостоятельного решения

1. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(-2;-3)$ и симметрична относительно оси Ox. Написать ее уравнение, найти фокус и директрису.

   Ответ: $y^2 = -\dfrac{9}{2}x, \ F\left(-\dfrac{9}{8}; 0\right), \ x = \dfrac{9}{8}.$

2. Составить каноническое уравнение эллипса, если его большая полуось равна 10, а эксцентриситет равен 0,8.

   Ответ: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$

3. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $A(-1;\,5),\ B(-2;\,-2),\ C(5;\,5).$

   Ответ: $(2;\,1),\ r=5.$

4. Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки $A(2;\,1),\ B(-4;\,\sqrt{7}).$

   Ответ: $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{1}=1.$

5. Построить следующие кривые:

   1) $y^2-8y=4x;$

   2) $x^2+4x+2y+4=0;$

   3) $x^2+y^2+10x-4y+13=0;$

   4) $x^2+2y^2-4x+4y+2=0;$

   5) $16x^2-9y^2-64x-18y-89=0;$

   6) $x^2+y^2+xy-2x+3y=0.$

Поверхности второго порядка

7. Поверхности второго порядка

7.1. Основные понятия

Уравнению относительно трех текущих координат соответствует некоторая поверхность.

Поверхность второго порядка – поверхность, определяемая в некоторой системе прямоугольных декартовых координат уравнением второй степени:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0, \tag{7.1}$$

где $A, B, C, D, E, F, G, H, I, G, K$ – коэффициенты уравнения (действительные числа). Не все коэффициенты при членах второго порядка одновременно равны нулю.

Если имеется хотя бы одна точка трехмерного пространства с координатами, удовлетворяющими уравнению (7.1), то такая поверхность называется ***действительной***.

Уравнение (7.1) может определять вырожденную поверхность – пустое множество, точку, плоскость, пару плоскостей.

Существует пять классов действительных невырожденных поверхностей второго порядка:

1) эллипсоиды;
2) гиперболоиды;
3) параболоиды;
4) конусы;
5) цилиндры.

Если поверхность невырожденная, то преобразованием декартовой прямоугольной системы координат ее уравнение (7.1) может быть приведено к наиболее простой форме записи – ***каноническому уравнению поверхности второго порядка***.

Основной метод исследования поверхностей – метод сечений. Поверхность пересекается несколькими плоскостями, параллельными плоскостям координат. Формы и размеры полученных сечений позволяют выяснить форму самой поверхности.

7.2. Эллипсоид

Эллипсоид **–** поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (7.2)$$

Уравнение (7.2) называется ***каноническим уравнением эллипсоида***.

Оси координат являются ***осями симметрии эллипсоида***, а начало координат – его ***центром симметрии***.

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью Oxy (т. е. $z = 0$). В сечении получим линию, определяемую системой

$$\begin{cases} z=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1. \end{cases}$$

Итак, в плоскости Oxy имеем эллипс с полуосями a, b. Рассмотрим теперь сечения поверхности плоскостями, параллельными плоскости Oxy, т. е. плоскостями $z = h$, h – любое число. В сечении получим линии, определяемые системой

$$\begin{cases} z=h, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}. \end{cases} \qquad (7.3)$$

Исследуем уравнения (7.3).

1. Если $|h|>c$, то системе (7.3) не удовлетворяют никакие точки пространства.

2. Если $|h| = c$, то линия пересечения вырождается в две точки $(0;\, 0;\, c)$, $(0;\, 0;\, -c)$.

3. Если $|h| < c$, то уравнение можно переписать в виде

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1. \end{cases}$$

Линия пересечения есть эллипс с полуосями $a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$. Чем меньше $|h|$, тем больше полуоси. При $h = 0$ они достигают своих наибольших значений.

Рассмотрим сечения эллипса плоскостями $y = 0$, $x = 0$, мы вновь получим эллипсы

$$\begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

с полуосями a и c, b и c соответственно. Общий вид эллипса приведен на рис. 7.1.

Числа a, b, c называются ***полуосями*** эллипсоида. Если все они различны то эллипсоид называется ***трехосным***; если какие-либо две полуоси равны, трехосный эллипсоид превращается в ***эллипсоид вращения***; если $a = b = c$, то уравнение эллипсоида принимает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

и поверхность представляет собой ***сферу*** радиуса a с центром $(0;\, 0;\, 0)$.

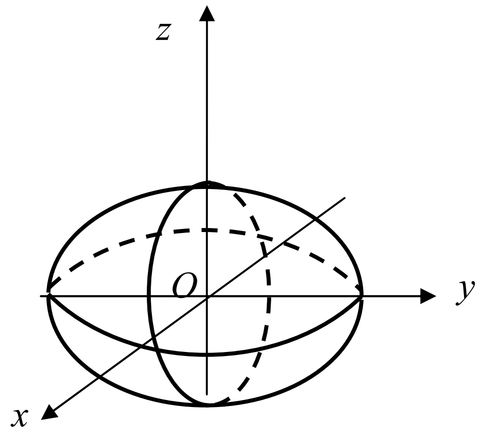


Рис. 7.1

7.3. Гиперболоиды

К гиперболоидам относятся две поверхности: однополостные и двуполостные гиперболоиды.

Однополостный гиперболоид - поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (7.4)$$

Уравнение (7.4) называется ***каноническим уравнением однополостного гиперболоида***.

Рассмотрим сечение поверхности плоскостью $z = h$. В сечении получаем следующую линию:

$$\begin{cases} z=h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1. \end{cases}$$

Это эллипс с полуосями $a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$. С ростом $|h|$ полуоси эллипса будут увеличиваться. При $h = 0$ полуоси минимальны.

Если пересечь поверхность плоскостями $x = h$ или $y = h$, то в сечении получим гиперболы.

Например, рассмотрим сечение плоскостью $x = 0$. Получаем линию

$$\begin{cases} x = 0, \\ \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases}$$

Эта линия есть гипербола с полуосями b и c, причем действительная ось гиперболы совпадает с осью Oy. Однополостный гиперболоид представлен на рис. 7.2. Оси координат являются его осями симметрии, начало координат – центром симметрии.

Поверхность имеет форму бесконечно расширяющейся трубки.

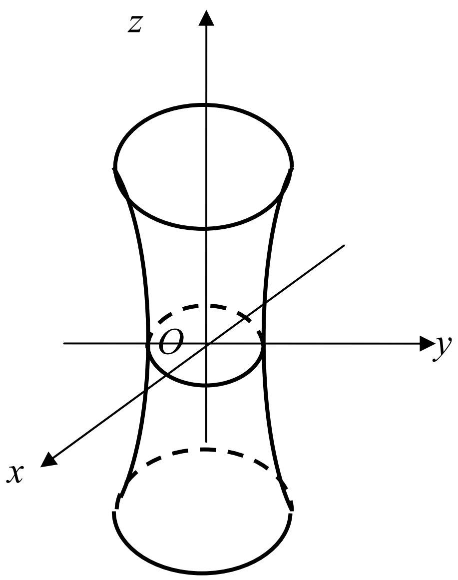


Рис. 7.2

Двуполостный гиперболоид – поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{7.5}$$

Уравнение (7.5) называется ***каноническим уравнением двуполостного гиперболоида***.

Если поверхность пересечь плоскостями $z = h$, то линия пресечения будет определяться уравнениями

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}\right)^2} = 1. \end{cases} \qquad (7.6)$$

Исследуем уравнения (7.6).

1. Если получаем $|h| < c,$ то плоскости $z = h$ не пересекают поверхности.
2. Если $|h| = c,$ то плоскости $z = \pm h$ касаются данной поверхности соответственно в точках $(0;\, 0;\, c),\, (0;\, 0;\, -c).$
3. Если $|h| > c,$ то линия пересечения есть эллипс с полуосями $a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$, $b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2}-1}$. С ростом $|h|$ полуоси неограниченно возрастают.

Пересекая поверхность координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$, получим в сечениях гиперболы, уравнения которых соответственно имеют вид

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Поверхность представлена на рис. 7.3. Оси координат являются ***осями симметрии двуполостного гиперболоида***, а начало координат – ***центром симметрии***.

Поверхность состоит из двух полостей, имеющих форму выпуклых неограниченных чаш.

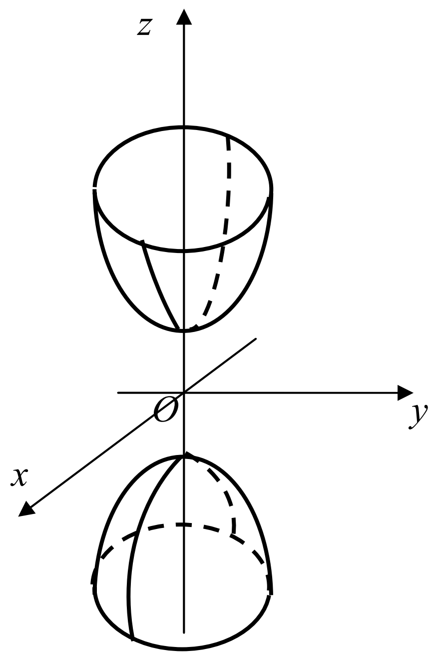


Рис. 7.3

7.4. Параболоиды

Эллиптический параболоид – поверхность, которая в прямоугольной системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z. \tag{7.7}$$

Уравнение (7.7) называется ***каноническим уравнением эллиптического параболоида***.

Рассмотрим сечение параболоида плоскостью $z = h$.

1. Если $h < 0$, то плоскости $z = h$ поверхности не пересекают.
2. Если $h = 0$, то плоскость $z = 0$ касается поверхности в точке (0; 0; 0).
3. Если $h > 0$, то в сечении получаем эллипс

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2 h}+\dfrac{y^2}{b^2 h}=1 \end{cases}$$

с полуосями $a\sqrt{h}$, $b\sqrt{h}$. Оси эллипса растут с ростом h.

При пересечении поверхности координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$, получаем соответственно параболы

$$z = \frac{y^2}{b^2}, \quad z = \frac{x^2}{a^2}.$$

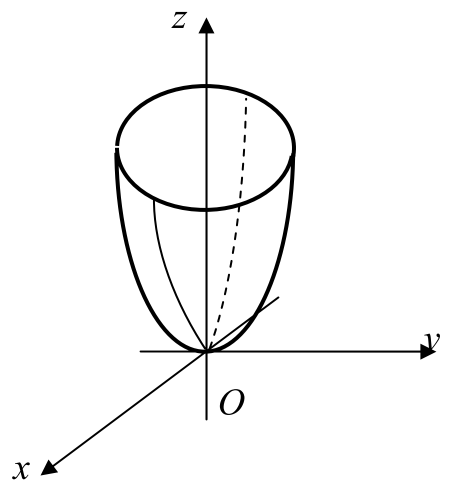


Рис. 7.4

Ось Oz является ***осью симметрии эллиптического параболоида***; начало координат является ***вершиной эллиптического параболоида***.

Поверхность имеет вид выпуклой расширяющейся чаши (рис.7.4).

Гиперболический параболоид - поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{7.8}$$

Уравнение (7.8) называется ***каноническим уравнением гиперболического параболоида***.

Рассечем поверхность плоскостями $z = h \ (h \neq 0)$, получим гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2 h} - \frac{y^2}{b^2 h} = 1.$$

1. Если $h > 0$, то действительная ось гиперболы параллельна оси Ox.
2. Если $h < 0$, то действительная ось гиперболы параллельна оси Oy.
3. Если $h = 0$, то линия пересечения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

распадается на пару пересекающихся прямых.

Рассмотрим сечения параболоида плоскостью $x = h$. Получаем линию

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = -b^2\left(z - \dfrac{h^2}{a^2}\right). \end{cases}$$

Эта линия – парабола в плоскости $x = h$ с вершиной в точке $P\left(h;\ 0;\ \dfrac{h^2}{a^2}\right)$. Ось параболы параллельна оси *Oz,* ветви направлены вниз.

При пересечении поверхности плоскостями $y = h$, будут получаться параболы

$$\begin{cases} y = h, \\ x^2 = a^2\left(z + \dfrac{h^2}{b^2}\right), \end{cases}$$

ветви которых направлены вверх.

Поверхность имеет вид седла (рис. 7.5).

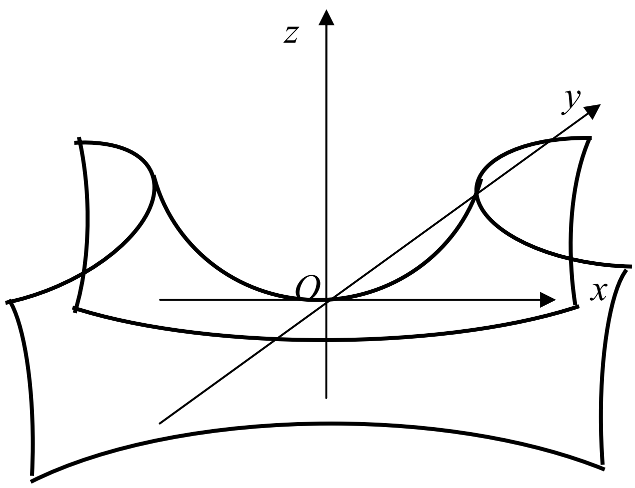


Рис. 7.5

7.5. Конус

Конус (коническая поверхность) – поверхность, которая в прямоугольной системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{7.9}$$

Уравнение (7.9) называется ***каноническим уравнением конуса***.

При сечении конуса плоскостью $z = h$ получаем

$$\begin{cases} z=h, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}. \end{cases}$$

При $h = 0$ системе удовлетворяет только точка $(0;0;0)$, а при $h \neq 0$ получаем эллипс

$$\begin{cases} z=h, \\ \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{ah}{c}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{bh}{c}\right)^2}=1 \end{cases}$$

с полуосями $\dfrac{a|h|}{c}$, $\dfrac{b|h|}{c}$ и центром на оси Oz. С ростом $|h|$ полуоси эллипса неограниченно растут.

При сечении плоскости $x = 0$ получаем

$$\begin{cases} x=0, \\ \left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)=0. \end{cases} \tag{7.10}$$

В плоскости $x = 0$ система (7.10) выдает пару прямых, определяемых уравнениями $\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$ и $\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0$. Обе прямые проходят через начало координат.

Ось Oz является ***осью симметрии конуса***, а точка пересечения конуса с точкой $(0;0;0)$ называется ***вершиной конуса*** и является его ***центром симметрии*** (рис.7.6).

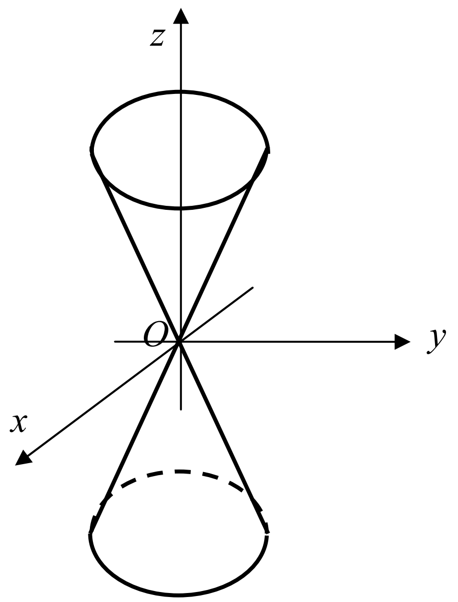


Рис. 7.6

7.6. Цилиндры

Эллиптический цилиндр – поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (7.11)$$

Осью цилиндра (7.11) является координатная ось Oz, поперечные сечения - эллипсы. Эллиптический цилиндр представлен на рис. 7.7. Круговой цилиндр является частным случаем эллиптического цилиндра.

Гиперболический цилиндр – поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (7.12)$$

Осью цилиндра (7.12) является координатная ось Oz, поперечные сечения – гиперболы. Гиперболический цилиндр представлен на рис. 7.8.

Oxy.

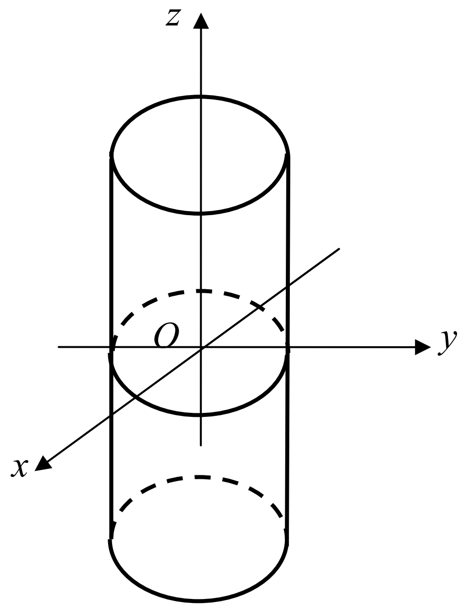


Рис. 7.7

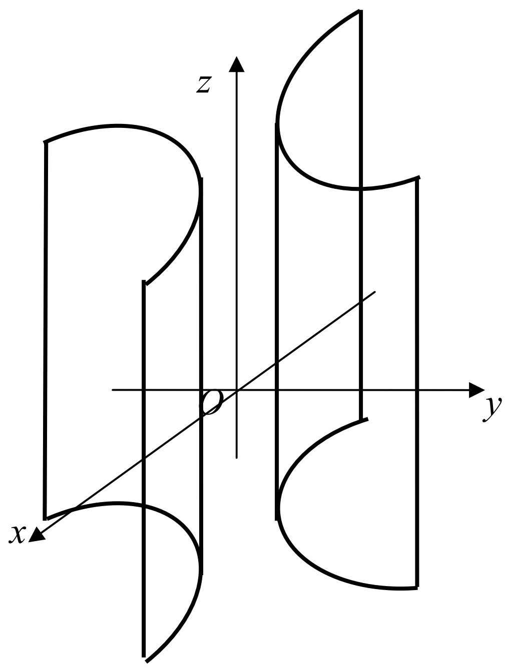


Рис. 7.8

Параболический цилиндр – поверхность, определяемая уравнением

$$y^2 = 2px, \ p > 0.$$

Направляющей здесь является парабола, расположенная в плоскости *Oxy*.

Параболический цилиндр представлен на рис. 7.9.

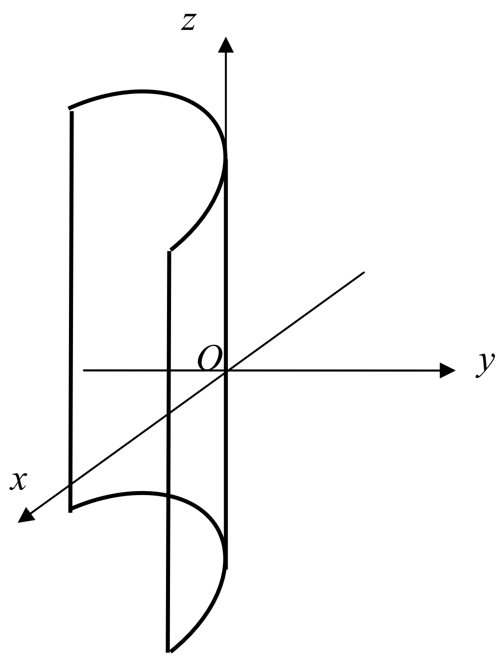


Рис. 7.9

П р и м е р. Определить вид поверхности $x^2 - 8x + 5y^2 + z^2 + 6z = 0$.

Решение. Выделим полные квадраты:

$$(x-4)^2 - 16 + 5y^2 + (z+3)^2 - 9 = 0,$$

$$(x-4)^2 + 5y^2 + (z+3)^2 = 25,$$

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{5} + \frac{(z+3)^2}{25} = 1.$$

Далее с помощью параллельного переноса осей координат перейдем к новой системе координат, положив

$$\begin{cases} x' = x - 4, \\ y' = y, \\ z' = z + 3. \end{cases}$$

Уравнение поверхности в новой системе координат

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{5} + \frac{z'^2}{25} = 1.$$

Заданная поверхность есть эллипсоид с полуосями $a = 5,\ b = \sqrt{5},\ c = 5$. Центр эллипсоида – точка (4; 0; -3).

Задачи для самостоятельного решения

1. Какие поверхности определяются уравнениями:

   а) $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x + 4y + 4z + 7 = 0$;

   б) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2z - 2 = 0$?

Ответ: а) эллипсоид с центром в точке (-2; 1; 0);

б) параболоид с вершиной в точке (-1; 1; -2).

2. В каких точках прямая $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+6}{-3} = \dfrac{z+2}{-2}$ пересекает эллипсоид $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1$?

Ответ: $M_1(2; -3; 0)$, $M_2(0; 0; 2)$.

3. При каком значении a прямая $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{a}$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$? Найти точку касания.

Ответ: $a = -2$, $\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Библиографический список

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. М. : Наука, 1987.
2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. М. : Высш. шк., 1999.
3. Ильин В. А. Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. М. : Рольф, 2000.
5. Сборник задач по высшей математики / под ред. Г. И. Кручковича. М. : Высш.шк., 1973.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1 / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. М. : Наука, 1986.
7. Шипачев В. С. Основы высшей математики / В. С. Шипачев. М. : Высш.шк., 1994.