МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова»

Институт судостроения и морской арктической техники (Севмашвтуз)
(наименование высшей школы/ филиала/ института/ колледжа)

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

По дисциплине: Методика и практика технического эксперимента

На тему: Вариант № 10.

Выполнил (-а) обучающийся (-аяся):
Кузьминова Александра Олеговна
(Ф.И.О.)

Направление подготовки / специальность:
26.04.02 Кораблестроение, океанотехника и системотехника объектов морской инфраструктуры
(код и наименование)

Курс: 2
Группа: 522836

Руководитель:
Куклин Михаил Васильевич
(Ф.И.О. руководителя)

Отметка о зачете хорошо (отметка прописью) 18.01.2020 (дата)

Руководитель Куклин (подпись руководителя) М.В. Куклин (инициалы, фамилия)

Северодвинск 2019

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант № 10

Задача 1

С помощью тахометра получены следующие частоты вращения вала, об/мин (см. ниже). Необходимо выполнить статистическую обработку результатов измерений ($\bar{y}$, S^2, S, υ, m, P, y_{min}, y_{max}) и оценить случайную погрешность ($\bar{y} \pm \dot{\Delta y}$), предположительно считая результаты измерений правильными и находящимися в пределах допуска при доверительной вероятности q = 0,05. Значение t-критерия Стьюдента выбирается из таблицы «Процентные точки распределения Стьюдента».

Частоты вращения вала имеют следующие значения, об/мин:

37,56	37,83	37,04	37,16	37,19	37,66	37,35	37,89	37,13	37,27

Задача 2

Проверить гипотезу о нормальном распределении деформации металлических пластин при выборке n = 55. Деформации металлических пластин y имеют следующие значения, мм (см. ниже). Построить теоретическую и экспериментальную кривую нормального распределения деформации металлических пластин. Значение функции Лапласа выбирается из таблицы в приложении к методическим указаниям. Табличное значение $\chi^2_{\text{табл}}$ – критерия Пирсона при уровне значимости q = 0,05 выбирается из таблицы. Значение коэффициента h выбирается из таблицы.

Деформации металлических пластин имеют следующие значения, мм:

49	38	22	39	28	45	54	61	62	42	53
15	68	16	73	14	76	39	43	89	76	84
27	34	43	29	43	50	53	26	89	25	51
11	63	34	39	84	74	69	49	75	35	83
44	15	49	51	60	73	63	32	54	54	69

Задача 3

Предположим, имеется нормально распределенная случайная величина y. Произведено N независимое наблюдение этой величины и получен следующий массив данных (см. ниже). Определить 90%-ные доверительные интервалы для истинного среднего значения $\bar{Y}$ и истинной дисперсии S^2 случайной величины y. Процентные точки распределения Стьюдента $t_\alpha(n)$ и распределения $\chi^2(n)$ выбираются из таблиц в приложении к методическим указаниям.

Измеренные значения случайной величины:

35	36	32	31	36	38	40	44	29	34	28	36	30	36	31	33	42	40	35

ЛИСТ ДЛЯ ЗАМЕЧАНИЙ

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

С помощью тахометра получен ряд частот вращения вала, об/мин. Необходимо выполнить статистическую обработку результатов измерений ($\bar{y}$, S^2, S, v, m, P, y_{min}, $y_{\max}$) и оценить случайную погрешность ($\bar{y} \pm \dot{\Delta} y$), предположительно считая результаты измерений правильными и находящимися в пределах допуска при доверительной вероятности q = 0,05. Значение t-критерия Стьюдента выбирается из таблицы «Процентные точки распределения Стьюдента».

Решение:

1) Находим минимальное и максимальное значения выборки:

$$y_{min} = 37{,}04 \text{ об/мин}; \; y_{max} = 37{,}89 \text{ об/мин}$$

2) Среднее арифметическое значение – это усредненный показатель всех имеющихся значений.

Рассчитаем среднее значение выходной величины выборки $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

где y_i – i-тое значение выборки, n – число измерений. По условию задачи $n = 10$.

$$\bar{y} = \frac{37{,}56 + 37{,}83 + 37{,}04 + 37{,}16 + 37{,}19 + 37{,}66 + 37{,}35 + 37{,}89 + 37{,}13 + 37{,}27}{10} = 37{,}41 \text{ об/мин}$$

3) Дисперсия случайной величины – это величина, которая отражает меру разброса данных вокруг среднего арифметического.

Рассчитаем выборочную дисперсию S^2 при n < 30:

$$S^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}$$

$$S^2 = \frac{\begin{gathered}(37{,}56 - 37{,}41)^2 + (37{,}83 - 37{,}41)^2 + (37{,}04 - 37{,}41)^2 + (37{,}16 - 37{,}41)^2 + (37{,}19 - 37{,}41)^2 + \\ (37{,}66 - 37{,}41)^2 + (37{,}35 - 37{,}41)^2 + (37{,}89 - 37{,}41)^2 + (37{,}13 - 37{,}41)^2 + (37{,}27 - 37{,}41)^2\end{gathered}}{9} \approx 0{,}09 \text{ (об/мин)}^2$$

4) Среднее квадратичное отклонение – это наиболее распространённый показатель рассеивания значений случайной величины относительно её

математического ожидания, которое вычисляется, как квадратный корень из дисперсии.

Рассчитаем среднее квадратичное отклонение S:

$$S = \sqrt{S^2}$$

$$S = 0{,}3 \text{ об/мин}$$

5) Коэффициент вариации – это мера относительного разброса случайной величины; показывает, какую долю среднего значения этой величины составляет ее средний разброс. Измеряется в процентах.

Рассчитаем коэффициент вариации v:

$$v = \frac{S}{\bar{y}} \cdot 100$$

$$v = \frac{0{,}3}{37{,}41} \cdot 100 \approx 0{,}8$$

6) Среднеквадратическая ошибка среднего значения – это величина отклонения выборочной средней величины от ее генерального параметра.

Рассчитаем среднеквадратическую ошибку среднего значения m:

$$m = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$m = \frac{0{,}3}{\sqrt{10}} = 0{,}09$$

7) Относительная ошибка выборки – это величина, характеризующая погрешность, выраженную в процентном соотношении относительно выборочного наблюдения.

Рассчитаем относительную ошибку выборки P:

$$P = \frac{m}{\bar{y}} \cdot 100$$

$$P = \frac{0{,}09}{37{,}41} \cdot 100 = 0{,}24$$

Т.к. $P < 3\%$ (требования для повышенной точности), результатам предположительно можно доверять.

8) Случайная погрешность отражает разброс результатов при многократном измерении одной и той же величины. Она обладает свойством предельного значения, т.е. значения случайных погрешностей при одинаковых

условиях не могут превышать предельного. Это предельное значение (предельная ошибка выборки) является граничным, отделяющим случайные погрешности от грубых.

Рассчитаем абсолютную случайную погрешность Δy при n < 20:

$$\Delta y = t_{\alpha}(n) \cdot m$$

где $t_q(n)$ – критерий Стьюдента, который выбирают по таблице исходя из уровня значимости q и числа степеней свободы f.

По условию задачи q = 0,05, f = n – 1 = 9. Выбираем $t_q(n)$ = 2,26.

$$\Delta y = 2{,}26 \cdot 0{,}09 \approx 0{,}2$$

9) Таким образом, интервал, в рамках которого может изменяться измеряемая величина:

$$\bar{y} - \Delta y < y < \bar{y} + \Delta y$$

$$37{,}41 - 0{,}2 < y < 37{,}41 + 0{,}2$$

$$37{,}21 < y < 37{,}61$$

2 ПРОВЕРКА НОРМАЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫХОДНЫХ ВЕЛИЧИН, ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ КРИВОЙ

Проверить гипотезу о нормальном распределении деформации металлических пластин при выборке n = 55. Деформации металлических пластин y имеют ряд значений, мм. Построить теоретическую и экспериментальную кривую нормального распределения деформации металлических пластин. Значение функции Лапласа выбирается из таблицы в приложении к методическим указаниям. Табличное значение $\chi^2_{\text{табл}}$ – критерия Пирсона при уровне значимости q = 0,05 выбирается из таблицы. Значение коэффициента h выбирается из таблицы.

Решение:

1) Рассчитаем среднее значение выходной величины выборки $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

где y_i – i-тое значение выборки, n – число измерений. По условию задачи $n = 55$.

Используем функцию СРЗНАЧ в Microsoft Excel:

$$\bar{y} = 49{,}75 \text{ мм}$$

2) Рассчитаем выборочную дисперсию S^2 при n > 30:

$$S^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}$$

Используем функцию ДИСП в Microsoft Excel:

$$S^2 = 436{,}53 \text{ мм}^2$$

3) Рассчитаем среднее квадратичное отклонение S:

$$S = \sqrt{S^2}$$

Используем функцию СТАНДОТКЛОН в Microsoft Excel:

$$S = 20{,}89 \text{ мм}$$

4) Данные выборки разбиваем на 8 интервалов: (10…20), (20…30), …, (80…90). Для каждого интервала вычисляем z_1 и z_2 по формулам:

$$z_1 = \frac{(y_i^{\text{н}} - \bar{y})}{S}$$

$$z_2 = \frac{(y_i^{\text{в}} - \bar{y})}{S}$$

где $y_i^{н}$ и $y_i^{в}$ – соответственно нижняя и верхняя границы i-того интервала

Для примера рассчитаем z_1 и z_2 для интервала (10…20):

$$z_1 = \frac{10 - 49{,}75}{20{,}89} = -1{,}90$$

$$z_2 = \frac{20 - 49{,}75}{20{,}89} = -1{,}42$$

5) Используя таблицу функций Лапласа, определяем функции $\Phi_{(z_1)}$ и $\Phi_{(z_2)}$ для каждого интервала:

$$\Phi_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

Для примера определим $\Phi_{(z_1)}$ и $\Phi_{(z_2)}$ для интервала (10…20) при z_1 = -1,9 и z_2 = -1,42:

$$\Phi_{(z_1)} = -0{,}4713$$

$$\Phi_{(z_2)} = -0{,}4222$$

6) Вычисляем теоретические вероятности попадания случайной величины y в каждый i-тый интервал:

$$p_i = \Phi_{(z_2)} - \Phi_{(z_1)}$$

Для примера рассчитаем p_i для интервала (10…20):

$$p_i = -0{,}4222 - (-0{,}4713) = 0{,}049$$

7) Для каждого интервала вычисляем $\frac{(m_i - p_i n)^2}{p_i n}$.

Для примера рассчитаем для интервала (10…20):

$$\frac{(m_1 - p_1 n)^2}{p_1 n} = \frac{(5 - 0{,}049 \cdot 55)^2}{0{,}049 \cdot 55} = 1{,}958$$

8) Заполняем таблицу:

Таблица 1 – Таблица данных по интервалам

№ интервала	$y_i^{н}$	$y_i^{в}$	m_i	z_1	z_2	$\Phi_{(z_1)}$	$\Phi_{(z_2)}$	p_i	$p_i n$	$(m_i - p_i n)^2$	$\frac{(m_i - p_i n)^2}{p_i n}$
1	10	20	5	-1,90	-1,42	-0,4713	-0,4222	0,049	2,701	5,288	1,958
2	20	30	6	-1,42	-0,95	-0,4222	-0,3289	0,093	5,132	0,754	0,147
3	30	40	8	-0,95	-0,47	-0,3289	-0,1808	0,148	8,146	0,021	0,003
4	40	50	10	-0,47	0,01	-0,1808	0,04	0,221	12,144	4,597	0,379
5	50	60	8	0,01	0,49	0,04	0,1879	0,148	8,135	0,018	0,002
6	60	70	7	0,49	0,97	0,1879	0,334	0,146	8,036	1,072	0,133
7	70	80	6	0,97	1,45	0,334	0,4265	0,093	5,088	0,833	0,164
8	80	90	5	1,45	1,93	0,4265	0,4732	0,047	2,569	5,912	2,302

9) Определим расчётное значение X^2 критерия Пирсона:

$$X^2_{\text{расч}} = \sum_{l=1}^{e} \frac{(m_i - p_i n)^2}{p_i n}$$

Используем функцию СУММ в Microsoft Excel:

$$X^2_{\text{расч}} = 5{,}087$$

10) По выбранному уровню значимости q = 0,05 и числу степеней свободы k = l – 3 = 5 определим табличное значение $\mathrm{X}^2_{\text{табл}}$ Пирсона:

$$X^2_{\text{табл}} = 11{,}1$$

Так как $\mathrm{X}^2_{\text{расч}} < \mathrm{X}^2_{\text{табл}}$, принимается, что распределение деформации металлических пластин подчиняется законам нормального распределения.

11) Построим теоретическую и экспериментальную кривую нормального распределения. Экспериментальная кривая распределения – это полигон частот. На оси абсцисс откладывается значение изучаемого свойства – усреднённые значения y_i по интервалам – 5, 15, 25, …, 95. На оси ординат – значения частот m.

12) Для построения теоретической кривой необходимы значения выборочной средней $\bar{y} = 49{,}75$ мм и среднего квадратического отклонения $S = 20{,}89$ мм, которые были найдены ранее.

13) Теоретическую кривую нормального распределения строим на основе уравнения:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

где $\varphi(u_i)$ – значение функции Лапласа, берётся из таблицы.

14) График будет характеризоваться вершиной, значение абсцисс в которой равно $\bar{y}$, а значение ординат будет в точке M_y. Наибольшую высоту, соответствующую среднему значению $\bar{y}$ измеряемой величины, в точке M_y, определяем по формуле:

$$y_{max} = \frac{0{,}4 \cdot h \cdot n}{S}$$

где h – размер интервала.

$$y_{max} = \frac{0{,}4 \cdot 10 \cdot 55}{20{,}89} = 10{,}53$$

15) Влево и вправо от точки M_y ординаты нормальной кривой будут симметрично уменьшаться, их вычисляем по формуле:

$$y = h \cdot y_{max}$$

где k – числовой коэффициент, который берём по таблице.

16) Каждая из ветвей симметрична кривой нормального распределения, должна строится не менее, чем по четырем точкам. Исходные данные для построения кривой нормального распределения представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Данные для построения кривой нормального распределения

d в долях S	0	0,5	1,0	1,5	2,0
h	1	0,883	0,607	0,325	0,135
$\bar{y}$	49,75				
$d \cdot S$, отклонение от $\bar{y}$ в мм	0	10,45	20,89	31,34	41,79
Абсцисса влево от $\bar{y}$	49,75	39,3	28,85	18,41	7,96
Абсцисса вправо от $\bar{y}$	49,75	60,19	70,64	81,09	91,53
Ордината m	10,53	9,298	6,392	3,422	1,422

Согласно правилу «трёх сигм», в диапазоне [-3S; S] лежит 99,73 % всех данных; в диапазоне [-2S; 2S] – 95,45 %; в диапазоне [-S; S] – 68,27 %.

Теоретическая и экспериментальная кривые нормального распределения приведены на рисунке 1.

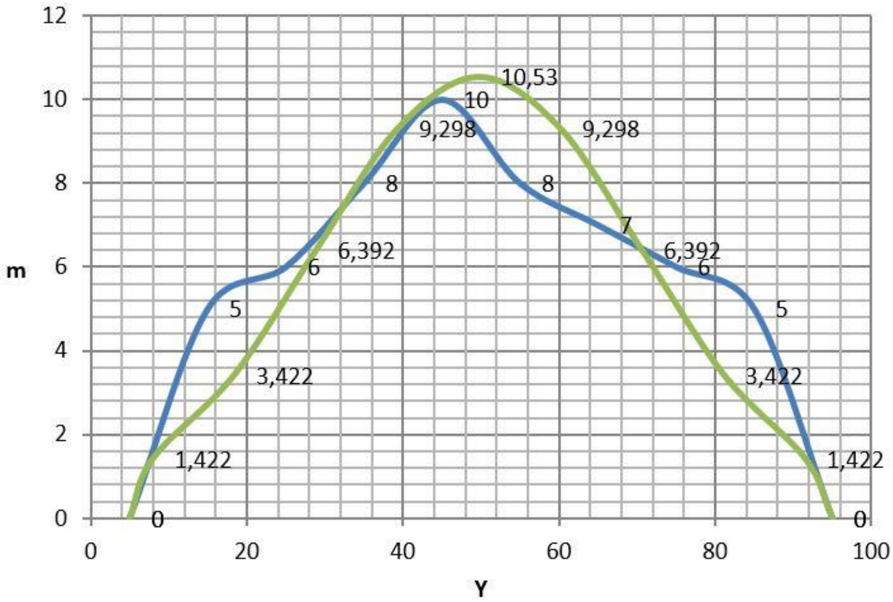

Рисунок 1 – Теоретическая (зелёным цветом) и экспериментальная (синим цветом) кривые нормального распределения деформации металлических пластин

3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

Предположим, имеется нормально распределенная случайная величина y. Произведено N независимое наблюдение этой величины и получен массив данных. Определить 90%-ные доверительные интервалы для истинного среднего значения $\bar{Y}$ и истинной дисперсии S^2 случайной величины y. Процентные точки распределения Стьюдента $t_\alpha(n)$ и распределения $\chi^2(n)$ выбираются из таблиц в приложении к методическим указаниям.

Решение:

1) Рассчитаем среднее значение выходной величины выборки $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$$

где y_i – i-тое значение выборки, N – число измерений. По условию задачи $N = 19$.

Используем функцию СРЗНАЧ в Microsoft Excel:

$$\bar{y} = 35{,}05$$

2) Рассчитаем выборочную дисперсию S^2 при $N < 30$:

$$S^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{N - 1}$$

Используем функцию ДИСП в Microsoft Excel:

$$S^2 = 19{,}39$$

3) Рассчитаем среднее квадратичное отклонение S:

$$S = \sqrt{S^2}$$

Используем функцию СТАНДОТКЛОН в Microsoft Excel:

$$S = 4{,}40$$

4) Доверительный интервал – это числовая характеристика погрешности, в которой с заданной доверительной вероятностью (P) находится погрешность измерения ($0 < P < 1$). Например, при доверительной вероятности $P = 0{,}95$ статистический вывод будет справедлив в 95 случаях из 100.

Рассчитаем доверительный интервал для $\bar{Y}$ по известным выборочным величинам $\bar{y}$ и S (среднее квадратичное отклонение):

$$\left(\bar{y} - \frac{St_{\frac{\alpha}{2}}(n)}{\sqrt{N}}\right) \le \bar{Y} \le \left(\bar{y} + \frac{St_{\frac{\alpha}{2}}(n)}{\sqrt{N}}\right)$$

где $n = N - 1$; $t_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ – критерий распределения Стьюдента, описывающего закон распределения ошибки (погрешности между генеральным и выборочным средним), берётся из таблицы «Процентные точки распределения Стьюдента».

n = 19 – 1 = 18;

α = 100% – 90% = 10%, следовательно α = 0,1.

Выбираем значение $t_{\frac{\alpha}{2}}(n) = t_{0,05}(18) = 1{,}734$. Таким образом:

$$\left(35{,}05 - \frac{4{,}4 \cdot 1{,}734}{\sqrt{19}}\right) \leq \bar{Y} \leq \left(35{,}05 + \frac{4{,}4 \cdot 1{,}734}{\sqrt{19}}\right)$$

$$33{,}3 \leq \bar{Y} \leq 36{,}8$$

5) Рассчитаем доверительный интервал для дисперсии S^2, соответствующий доверительной вероятности $1 - \alpha$:

$$\frac{nS^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \leq S_y^2 \leq \frac{nS^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}$$

где критерий распределения $\chi^2(n)$ берётся из таблицы.

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) = \chi^2_{0,05}(18) = 28{,}87$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) = \chi^2_{1-0,05}(18) = \chi^2_{0,95}(18) = 9{,}39$$

Таким образом:

$$\frac{18 \cdot 19{,}39}{28{,}87} \leq S_y^2 \leq \frac{18 \cdot 19{,}39}{9{,}39}$$

$$12{,}09 \leq S_y^2 \leq 37{,}17$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной контрольной работы являлось ознакомление с процессом обработки результатов многократных измерений и графического представления полученных данных, изучение законов распределения результатов измерения и их характеристики. В контрольной работе были решены три задачи на тему обработки результатов измерений.

В первой задаче были найдены требуемые характеристики погрешности измерений (дисперсия, среднее квадратичное отклонение, коэффициент вариации, среднеквадратическая ошибка среднего значения, относительная ошибка выборки) и оценена случайная погрешность измерений.

Во второй задаче была доказана принадлежность результатов измерений нормальному распределению и построены теоретическая и экспериментальная кривые распределения вариационного ряда.

В третьей задаче были определены доверительные интервалы, используемые для нахождения диапазона значений оцениваемой величины с заданной вероятностью.

При выполнении данной контрольной работы были усвоены и применены математические методы расчёта и анализа данных, закреплены теоретические знания по дисциплине «Методика и практика технического эксперимента».

Таким образом, задачи контрольной работы выполнены и цель достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Куклин М.В. Методика и практика технического эксперимента. Методические указания и контрольные задания для магистров ОЗФО. – Северодвинск: САФУ (Севмашвтуз), 2019. – 11 с.

2. Горохов В.А. Основы экспериментальных исследований и методик их проведения. – Минск: Новое издание; М.: ИНФРА-М, 2015. – 665 с.

3. Леонтьев Н.Л. Техника статистических вычислений. – М.: Лесная промышленность, 1966. – 250 с.

4. Прокофьев Г.Ф., Микловцик Н.Ю. Основы прикладных научных исследований при создании новой техники. – Архангельск: ИД САФУ, 2014. – 171 с.