Задание 12. Логическое следование

Учебные задачи

Овладеть терминами: *следование высказывательных форм*; *равносильность высказывательных форм*.

Научиться: *доказывать следование в простейших случаях*; *опровергать следование в простейших случаях*; *доказывать и опровергать равносильность высказывательных форм в простейших случаях*.

Текст для чтения

12.1. Понятие логического следования. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — высказывательные формы с одной свободной переменной x. Говорят, что *из высказывательной формы* $P(x)$ *следует форма* $Q(x)$, если при каждом значении переменной x, при котором $P(x)$ становится истинным высказыванием, высказывательная форма $Q(x)$ также становится истинным высказыванием. Обозначение:

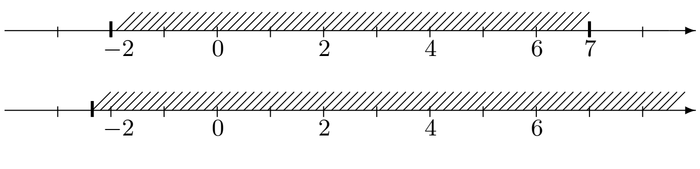
$$P(x) \quad \Rightarrow \quad Q(x).$$

В этом случае также говорят, что высказывательная форма $Q(x)$ *следует из высказывательной формы* $P(x)$, а также, что высказывательная форма $Q(x)$ есть *следствие из высказывательной формы* $P(x)$.

Примеры. 1. Покажем, что

$$x^2 - 5x - 14 \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 7 + 3x > 0.$$

Действительно, первое неравенство выполняется при $-2 \leqslant x \leqslant 7$. Второе неравенство выполняется при $x > -2\frac{1}{3}$. Понятно, что всякое решение первого неравенства является решением второго:



2. Задача. Докажите, что неравенство[1].

$$\frac{(x-2)(x-4)}{x+3} \geqslant 0 \quad \text{не следует из неравенства} \quad x^2-6x+8 \geqslant 0.$$

Решение. Для того, чтобы доказать, что первое неравенство не следует из второго, достаточно найти хотя бы одно такое значение переменной x, при котором второе неравенство выполнено, но первое — не выполнено.

Первый способ. Видим: первое неравенство при достаточно больших по абсолютное величине отрицательных значениях переменной x не будет выполняться, поскольку обе скобки числителя дроби

$$\frac{(x-2)(x-4)}{x+3}$$

и ее знаменатель окажутся отрицательными. В то же время второе неравенство при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях переменной x будет выполнено, так как квадратный трехчлен свои отрицательные значения принимает только между корнями. Подходящим значением может быть, например, $x=-10$: $(-10)^2-6(-10)+8=100+60+8 \geqslant 0$, но

$$\frac{(-10-2)(-10-4)}{-10+3} < 0.$$

Второй способ. Решим оба неравенства и найдем такое решение второго неравенства, которое не является решением первого.

Первое неравенство решим методом интервалов. Для этого на числовую ось нанесем точки, в которых дробь

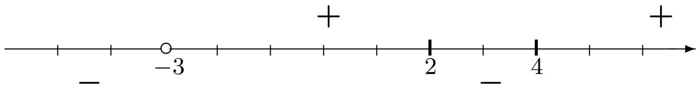
$$\frac{(x-2)(x-4)}{x+3}$$

изменяет свой знак. Это точки -3, 2, и 4. Действительно, если x возрастет от числа, меньшего -3 до числа большего -3, то знаменатель изменит свой знак с “ $-$ ” на “ $+$ ”. Аналогично, числитель изменит свой знак, если x возрастет от числа меньшего 2 до числа большего 2, но меньшего, чем 4, или же от числа меньшего 4, (но большего, чем 2) до числа большего 4.

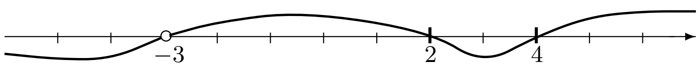
Теперь придадим x произвольное значение, отличное от точек изменения знака (от -3, 2, 4) и удобное для оценки знака дроби. Например, возьмем

[1] В математических исследованиях и задачах редко встречаются высказывательные формы вообще. Обычно имеют дело с частными видами высказывательных форм: уравнениями, неравенствами, системами уравнений, системы неравенств и т. д. Поэтому обычно говорят о том, что некоторое уравнение следует из другого, некоторое уравнение следует из данной системы неравенств и т. п.

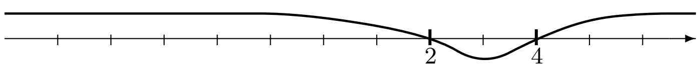
$x = 5$. Видно, что при этом значении каждая из скобок числителя и знаменатель принимают положительное значения, поэтому вся дробь принимает положительное значение. Остается каким-либо образом показать на рисунке знак, который имеет наша дробь на том или ином участке числовой приямой. Можно, например, это сделать так:



или с помощью линии, часть которой выше числовой оси или ниже ее, в зависимости от того, какой из знаков “ + ” или “ − ” имеет наша дробь:



Изобразим также решение второго (квадратичного) неравенства:

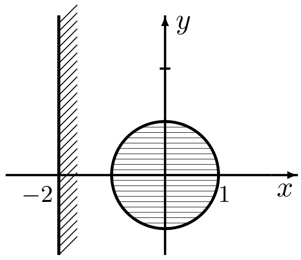


Видно, что имеются числа, например, -4, в которых второе неравенство истинно, а первое — нет.

В общем случае, высказывательные формы могут зависеть не от одной, а от нескольких переменных. Пусть P, Q — высказывательные формы, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — все переменные, входящие хотя бы в одну из них. Говорят, что высказывательная форма Q является *следствием* высказывательной формы P (*из* P *следует* Q), если при всяких значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых P принимает значение *И*, высказывательная форма Q также принимает значение *И*.

Примеры. 3. Покажем, что $x^2 + y^2 \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad x \geqslant -2$.

Действительно, пара вещественных чисел (x, y) удовлетворяет высказывательной форме $x^2 + y^2 \leqslant 1$, если и только если точка с координатами (x, y) принадлежит кругу радиуса 1 с центром в начале координат. Для любой такой пары точек, естественно, $x \geqslant -2$.



Заметим, что, согласно определению, из всякой тождественно ложной высказывательной формы следует любая высказывательная форма.

Из определений также получаем, что следование высказывательных форм связано своего рода обратным соотношением с вхождением в друг друга их множеств истинности:

$$P(x) \Rightarrow Q(x),$$

если и только если выполнено

$$\{x \mid P(x)\} \subset \{x \mid Q(x)\}.$$

12.2. Равносильные высказывательные формы. Два высказывания называются *равносильными*, если они одновременно оба истинны или оба ложны. Заметим, что высказывательные формы P и Q *равносильны*, если одновременно $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$. Если P и Q — равносильные высказывательные формы или высказывания, то пишут:

$$P \Leftrightarrow Q.$$

Очевидно, две высказывательные формы равносильны друг другу, если и только если, их множества истинности равны.

Вопросы для самоконтроля.

1) Пусть A и B — высказывательные формы, причем при всех значениях переменных, входящих в какую либо из этих форм, всякий раз, когда B принимает значение *И*, форма A также принимает значение *И*. Можно ли утверждать, что одна из форм наверняка следует из другой? Какая именно?

2) Пусть при всех значениях переменных, при которых форма B принимает значение *Л*, высказывательная форма A также принимает значение *Л*. Можно ли утверждать, что одна из форм наверняка следует из другой? Какая именно?

3) Пусть при всех значениях переменных, при которых форма B принимает значение *И*, высказывательная форма A принимает значение *Л*. Можно ли утверждать, что ни одна из форм не следует из другой?

Упражнения

1. Объясните, почему каждое из следующих утверждений истинно:

(а) $x = 3 \;\Rightarrow\; x^2 - 7x + 12 = 0$;

(б) $x > 6 \;\Rightarrow\; x^2 - 7x + 12 > 0$;

(в) $x^2 < 1 \;\Rightarrow\; x < 2$.

2. Опровергните следования:

(а) $|x| > 5 \;\Rightarrow\; x > 5$; (б) $x^2 = 4x+5 \;\Rightarrow\; x^2+10 = 7x$;

(в) $x^2 < x + 12 \;\Rightarrow\; x^2 + x < 12$.

3. Выясните, какие из следующих утверждений верны:

(а) $x < 1 \Rightarrow |x| < 1$; (б) $\sqrt{x} > 2 \Rightarrow x > 4$;

(в) $\log_2 x > 1 \Rightarrow x > 1$; (г) $x > 10 \Rightarrow \log_3 x > 0$?

4. Какие из высказывательных форм следуют из условия

$$\frac{2x-5}{x-2} \geqslant 4:$$

(а) $x^2 - 8x + 12 > 0$; (б) $\dfrac{(x+3)(x-7)}{x-3} \leqslant 0$;

(в) $\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x-2)^2} \leqslant 0$; (г) $|x-1| < |x-3|$?

5. Среди перечисленных высказывательных форм найдите те, из которых следует высказывательная форма $\sqrt{x-3} > 1$:

(а) $x^2 - 3x + 5 \leqslant 0$; (б) $\dfrac{x-5}{8-x} \geqslant 0$;

(в) $\log_2(x-2) > 1$; (г) $\sqrt{x+2} < x - 4$?

6. Докажите или опровергните следующие утверждения:

(а) $\dfrac{x-3}{x-2} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 - 5x - 6 > 0$;

(б) $x^2 - 5x - 24 \leqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{x-8}{x+3} \leqslant 0$;

(в) $\sqrt{x-5} > 2 \quad\Leftrightarrow\quad \log_3 x > 2$;

(г) $\dfrac{x-5}{x-9} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x-5} < 2.$

Ответы. 2. (а) Например, если $x = -10$, то $|x| = |-10| = 10 > 5$, однако $x = -10 < 5$; (б) например, при $x = -1$ высказывательная форма $x^2 = 4x+5$ принимает значение *И*, а $x^2+10 = 7x$ — значение *Л*; (в) например, при $x = 3{,}5$ неравенство $x^2 < x+12$ принимает значение *И*, а неравенство $x^2 + x < 12$ — значение *Л*. **3.** (б), (в), (г). **4.** (а), (в), (г). **5.** (а), (б), (в), (г). **6.** Истинны (в), (г); ложны (а), (б).