Задание 1. Множество и его элементы

Множество — это одно из основных понятий математики, используемое почти во всех ее разделах. С его помощью вводятся многие другие важные математические понятия. Само понятие *множества* является одним из исходных понятий математики, ему не дается ▷`явное определение`.

Понятие множества сформировалось в математике XIX века. Создателем теории множеств является немецкий математик Георг Кантор (1845–1918).

Учебные задачи

Овладеть терминами: *элемент, множество, пустое множество, равные множества*.

Научиться: *распознавать элементы множества, заданного перечислением его элементов*; *распознавать равные множества*.

Познакомиться: *со способом доказательства равенства двух множеств*, *а также со способом опровержения равенства двух множеств*.

Текст для чтения

1.1. Понятие множества и понятие элемента множества. Под *множеством* понимают совокупность объектов, которая рассматривается как одно целое. В математике изучаются различные множества: те или иные множества чисел, различные множества геометрических фигур, точек, прямых, многочленов, функций и другие.

Объекты, входящие в состав множества, называются его *элементами*. Если объект a является элементом некоторого множества M, то пишут:

$$a \in M.$$

Эту запись читают:

“ a *есть элемент множества* M ”,

или же

“ a *принадлежит множеству* M ”,

а также

“*множество* M *содержит элемент* a”.

Последнее также записывают:

$$M \ni a.$$

Буква $\in$ — *знак принадлежности* элемента множеству.
В тех случаях, когда a не является элементом множества M, можно писать:

$$a \notin M \text{ или } M \not\ni a.$$

Примеры. 1. Пусть A обозначает множество всех чётных целых чисел. Тогда справедливы записи: $4 \in A$, $-2 \in A$, $0 \in A$, $3 \notin A$. Действительно, целое число называется чётным, если оно делится на 2. Числа 4, -2 и 0 делятся на 2, а вот число 3 на 2 не делится.

Заметим, что множество само может служить элементом другого множества.

Примеры. 2. В современной геометрии всякая фигура — прямая, окружность, круг, сфера и т. д. — есть некоторое множество точек. Рассмотрим множество всех прямых плоскости. Его элементами служат прямые, т. е. некоторые множества точек.

Русское слово “множество” (смысл которого: *многое*) не совсем верно передает то значение, в котором используется термин “*множество*” в математике. В математике этим термином обозначают совокупность каких-либо элементов, даже если она содержит элементов совсем мало. Рассматривают даже множество, не содержащее ни одного элемента. Оно называется *пустым множеством* и обозначается знаком $\varnothing$.

Примеры. 3. Запись $1 \in \varnothing$ выражает неверное утверждение, потому что 1 не является элементом пустого множества (пустое множество не имеет элементов).

1.2. Равные множества. Два множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Это означает, что каждый элемент множества A является также и элементом множества B, и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A. В этом случае пишут: $A = B$.

Практические выводы из определения. (1) Для того, чтобы доказать, что два множества *равны*, следует доказать два утверждения: (а) каждый элемент первого множества является также и элементом второго; (б) каждый элемент второго множества служит также и элементом первого множества.

(2) Для того, чтобы доказать, что некоторые два множества *не равны*, достаточно указать такой элемент какого-либо из этих двух множеств, который не принадлежит другому из них.

Примеры. 4. Пусть A — множество всех целых чисел, которые делятся как на 2, так и на 3. Пусть B — множество всех целых чисел, делящихся на 6. Тогда $A = B$. Действительно, если целое число делится на 2 и на 3, то оно делится и на 6. Обратно, если целое число делится на 6, то оно также делится и на 2, и на 3.

5. Множество решений уравнения $2x - 6 = 0$ не равно множеству решений уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$. Действительно, число 2, являющееся решением второго уравнения, не является решением первого.

6. Множество решений уравнения $x^2+x+2 = 0$ в множестве действительных чисел равно множеству решений неравенства $x^2 - 3x + 3 < 0$. В самом деле, каждое из этих множеств не содержит ни одного элемента, т. е. является пустым. Можно утверждать, что каждый элемент первого множества является также и элементом второго множества, и обратно.

1.3. Задание множества перечислением его элементов. Из определения равных множеств следует, что множество будет задано, если будут указаны все его элементы. Иногда удается перечислить (выписать) все элементы множества. В этом случае используют следующие обозначения. Если, например, множество M состоит из элементов 1, 2, 3, то пишут: $M = \{1; 2; 3\}$. Как видим, пара фигурных скобок здесь заменяет словесную конструкцию “*множество, состоящее из элементов:* ... ”

В общем случае, если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — это все элементы множества A, то пишут: $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ или $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$[1].

[1] Во избежании путаницы, перечислять элементы множества, отделяя их друг от друга запятыми, стоит только в том случае, когда в записях этих элементов нет десятичных дробей.

Запись

$$\{a_1;\, a_2;\, \ldots\, ;\, a_n\}$$

можно прочитать так:

“*множество, состоящее из элементов* a_1, a_2, *и так далее*, a_n”,

или

“*множество, всеми элементами которого, служат* a_1, a_2, *и так далее*, a_n”.

Примеры. 7. Множества $\{1;\, 2;\, 3\}$ и $\{3;\, 1;\, 2\}$ равны, поскольку эти множества состоят из одних и тех же элементов (каждый элемент первого из этих множеств является элементом и второго, и обратно, каждый элемент второго множества является элементом первого).

8. $\{1;\, 2;\, 3\} = \{1;\, 2;\, 2;\, 3\}$, потому что эти множества состоят из одних и тех же элементов.

Можно строить различные, в том числе и непривычные, множества, просто перечисляя их элементы.

Примеры. 9. Рассмотрим множество S, которое состоит из *двух* элементов, один из которых есть 1, а другой — множество $\{2;3\}$. Получим запись: $S = \{1;\, \{2;3\}\}$. Заметим, что $2 \notin S$, $3 \notin S$, поскольку ни 2, ни 3 элементами множества $\{1;\, \{2;3\}\}$ не являются. Заметим также, что $\{1;\, \{2;3\}\} \neq \{1;2;3\}$. Действительно, первое из этих множеств состоит из двух элементов, а второе — из трех.

10. Множества $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ различны: первое из них — пустое множество, оно не содержит ни одного элемента; второе из этих множеств в качестве единственного элемента содержит множество $\varnothing$. Поэтому, в частности, запись $\varnothing \in \{\varnothing\}$ выражает истинное утверждение, а запись $\varnothing \in \varnothing$ — ложное.

11. Рассмотрим множество S_1, единственным элементом которого служит 1. Перечисляя элементы этого множества, мы его запишем так: $S_1 = \{1\}$. А теперь рассмотрим множество S_2, состоящее из двух элементов: 1 и S_1. Это множество

$$S_2 = \{1;\, S_1\} = \{1;\, \{1\}\}.$$

Таким образом, взяв изначально всего один элемент 1, мы построили двухэлементное множество. Построения можно продолжить и получить трехэлементное множество

$$S_3 = \{1;\, S_1;\, S_2\} = \Big\{1;\, \{1\}, \{1;\, \{1\}\}\Big\},$$

четырехэлементное множество

$$S_4 = \{1;\, S_1;\, S_2;\, S_3\} = \Big\{1;\, \{1\};\, \{1;\, \{1\}\};\Big\{1;\, \{1\};\, \{1;\, \{1\}\}\Big\}\Big\}$$

и т. д.

1.4. Конечные и бесконечные множества. В математике имеются различные определения конечного множества и различные определения бесконечного множества. С некоторыми из них вы должны познакомиться в дальнейших курсах. Интуитивно, *конечное множество*, это множество, все элементы которого можно занумеровать последовательными натуральными числами, начиная с 1 и заканчивая некоторым натуральным числом n (т. е. числами $1, 2, \ldots, n$). Говорят, в этом случае, что данное множество содержит ровно n элементов и что количество элементов данного множества равно n.

Пример. 12. Можно утверждать, что множество $\{13; 2; 15; 43; a; b\}$ содержит шесть элементов, т. к. его элементы легко занумеровать последовательными натуральными числами от 1 до 6.

Мы будем пользоваться пока именно этим представлением о конечном множестве. *Бесконечное множество* — это множество, не являющееся конечным.

Невозможно выписать все элементы бесконечного множества. Да и в том случае, когда множество конечно, то выписать *практически* все его элементы мы сможем далеко не всегда. Ведь существуют конечные множества со столь громадным числом элементов, что перечисление их может занять сколько угодно тысяч, а то и миллиардов тысяч лет! Поэтому нужны и другие способы задания множества, не сводящиеся к перечислению всех его элементов.

Вопросы для самоконтроля.

1) Прочтите запись “ $x \in X$ ”.

2) Верно ли утверждение $\varnothing \in \varnothing$?

3) Требовалось доказать, что множества M_1 и M_2 равны. Студент доказал, что каждый элемент множества M_1 является также и элементом множества M_2. После этого он написал “ч. т. д.”. В чем его ошибка?

4) Сколько элементов содержит множество $\{\{1; 2; 3\}\}$?

Упражнения

1. Элементом каких из следующих множеств служит 1:

(а) $\{7;\ 3;\ 6;\ 2;\ 4;\ 5;\ 0\}$; (б) $\{9;\ 7;\ 5;\ 4;\ 8;\ 1;\ 3\}$;

(в) $\big\{\{1;\ 12\};\ \{2;\ 13\};\ \{3;\ 9\};\ \{4;\ 10\};\ \{5;\ 10\}\big\}$;

(г) $\big\{2;\ \{1\};\ \{2\};\ 3;\ 4;\ \{5\};\ 5\big\}$?

2. Какие из утверждений верны:

(а) $\{2;\ 3\} \in \{7;\ 6;\ 5;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0\}$;

(б) $\{2;\ 3\} \in \big\{\{4\};\ \{2;\ 4\};\ \{2\};\ \{3\};\ 2;\ 3;\ \{1;\ 2\}\big\}$;

(в) $\big\{2;\ 3\big\} \in \{7;\ 5;\ 3;\ \{3; 2\};\ \{2;\ 6\}\big\}$;

(г) $\{2;\ 3\} \in \big\{\{1\};\ \{2;\ 3;\ 4\};\ 2;\ \{2;\ 4\}\big\}$.

3. Задайте множество в символьной форме перечислением его элементов, элементами которого служат:

(а) число 1, число 2 и множестово $\{1;\ 2\}$;

(б) буква a, буква b и множество, состоящее из букв a и b;

(в) число 1, буква f, и пустое множество;

(г) одноэлементное множество, элементом которого служит пустое множество, двухэлементное множество, состоящее из чисел 0 и 1, одноэлементное множество, элементом которого служит число 0.

4. Сколько элементов содержит множество:

(а) $\{1;\ 2;\ 2;\ 3;\ 4\}$;

(б) $\big\{0;\ \{0\}\big\}$;

(в) $\big\{0;\ 1;\ \{0\};\ \{1\};\ \{0;\ 1\}\big\}$.

5. Найдите среди следующих утверждений истинные:

(а) $0 \in \varnothing$; (б) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; (в) $\varnothing \in \varnothing$; (г) $\varnothing \in \{0\}$.

6. Какие из следующих равенств выполнены:

(а) $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\} = \{2;\ 4;\ 0;\ 3;\ 0;\ 2;\ 1\}$;

(б) $\big\{1;\ 3;\ 5;\ 7\big\} = \big\{1;\ 3;\ \{5;\ 7\}\big\}$;

(в) $\big\{\{2\};\ 4;\ 6;\ 8\big\} = \big\{8;\ 6;\ 4;\ 2\big\}$;

(г) $\big\{1;\ 3;\ 5;\ 7\big\} = \big\{\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}\big\}$.

Ответы. 1. (б). **2.** (в). **3.** (а) $\big\{1;\ 2;\ \{1;\ 2\}\big\}$; (б) $\big\{a;\ b;\ \{a;\ b\}\big\}$; (в) $\{1;\ f;\ \varnothing\}$; (г) $\big\{\{\varnothing\};\ \{0;\ 1\};\ \{0\}\big\}$. **4.** (а) 4; (б) 2; (в) 5. **5.** (б). **6.** (а).