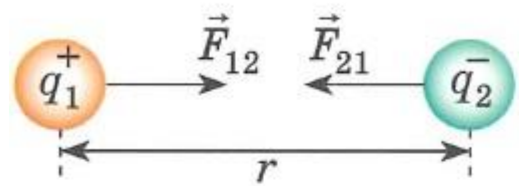
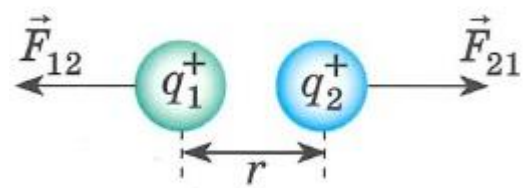
Закон Кулона. Напряженность электрического поля.

- Закон Кулона – закон, описывающий силы взаимодействия между неподвижными точечными электрическими зарядами.
- Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величине и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Она является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если эти знаки одинаковы.

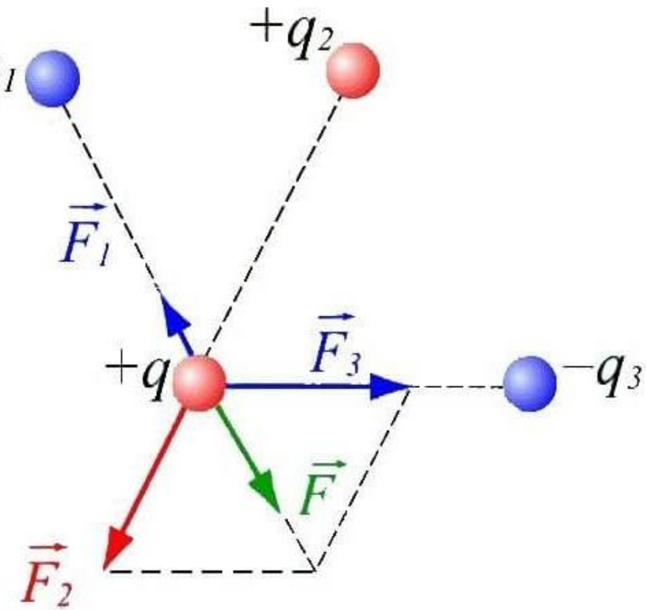
$$\vec{F}_{12} = -k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$



$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{12}\right| = F = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



- <u>Принцип суперпозиции</u>
- Результирующая сила $\vec{F}$, с которой действует на заряд q все N зарядов qi, определяется выражением:



$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i,$$

где $\vec{F}_i$ - сила, с которой действует на заряд q заряд q_i в отсутствии остальных (N-1) зарядов.

Следовательно, можно вычислить силу взаимодействия между зарядами, сосредоточенными на телах конечных размеров. Для этого нужно разбить каждый из зарядов на столь малые заряды dq, чтобы их можно было считать точечными, вычислить силу взаимодействия между зарядами dq, взятыми попарно, и затем произвести векторное сложение этих сил.

Закон Кулона верен, если выполняется:

- Точечность зарядов, т.е. расстояние между заряженными телами должно быть много больше их размеров;
- Неподвижность зарядов (иначе вступают в силу дополнительные эффекты: сила Лоренца, магнитное поле);
- Расположение зарядов в вакууме (с некоторыми корректировками закон справедлив также для взаимодействующих зарядов в среде).

Закон Кулона справедлив для расстояний от 10^{-15} м до нескольких км.

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Единица измерения заряда $[q]$ = Кл.

k=8,98755·10^9 Н·м^2/Кл^2

В однородном изотропном веществе в знаменатель формулы добавляется диэлектрическая проницаемость среды ε:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}$$

- <u>Электрическое поле</u> – векторное поле, существующее вокруг тел или частиц, обладающих электрическим зарядом (а также возникающее при изменении магнитного поля).
- Оно может быть обнаружено благодаря его силовому воздействию на заряженные тела.
- Неподвижный заряд q создает электрическое поле, обнаружить его можем точечным “пробным” зарядом $q_{\text{р}}$.
- На пробный заряд действует сила:

$$\vec{F} = q_p \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \right)$$

Она зависит от величин, определяющих поле (q и r) и от величины пробного заряда $q_{\text{р}}$.

- Введем величину $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_p}$ - напряженность электрического поля в данной точке.

  Она зависит лишь от величин q и r, определяющих поле в данной точке.

- Напряженность электрического поля – векторная физическая величина, характеризующая электрическое поле в данной точке и численно равная отношению силы, действующей на неподвижный точечный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$$

Единица измерения напряженности [E] = В/м

- Принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i$$

Напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности.

Линии напряженности могут начинаться или заканчиваться лишь на зарядах либо уходить в бесконечность.

- Закон сохранения заряда:

$$\sum q_i = const$$

Алгебраическая сумма зарядов, входящих в изолированную систему, остается постоянной.

Поток вектора напряженности электрического поля через произвольную поверхность S, помещенную в однородное поле:

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha dS = \int_S E_n dS$$

Задача 1. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α. Шарики погружаются в масло плотностью $\rho_0 = 8 \cdot 10^2$ кг/м³. Определить электрическую проницаемость ε масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков в масло остается неизвестным. Плотность материала шариков $\rho = 1{,}6 \cdot 10^3$ кг/м³.

- Решение:

1) В воздухе: $\sum \vec{F}_i = 0$

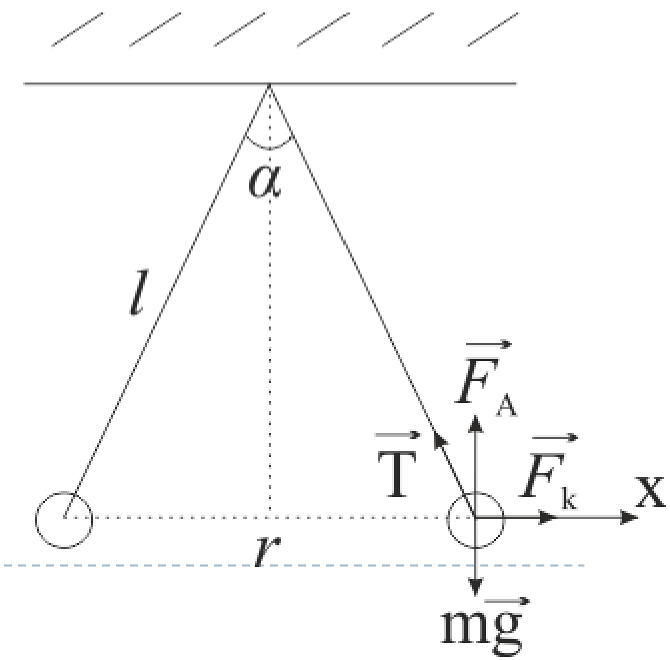
$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_k = 0, m = \rho V$$

$$\left.\begin{aligned} F_k - T\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \\ -mg + T\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_k = mgtg\frac{\alpha}{2}$$

2) В масле:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_k' = 0, F_A = \rho_0 gV$$

$$\left.\begin{aligned} F_k' - T\sin\frac{\alpha}{2} = 0 \\ mg - F_A - T\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_k' = (mg - F_A)tg\frac{\alpha}{2}$$



$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{F_k}{\rho Vg}=\frac{F_k'}{(\rho Vg-\rho_0 Vg)}\Rightarrow\frac{F_k}{\rho}=\frac{F_k'}{(\rho-\rho_0)}$$

$$F_k=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$F_k'=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$$

$$\frac{F_k}{F_k'}=\varepsilon=\frac{\rho}{(\rho-\rho_0)}$$

Подставляем значения: ε=2.

Задача 2. В элементарной теории атома водорода принимают, что электрон обращается вокруг ядра по круговой орбите. Определить скорость электрона, если радиус орбиты r=53 пм, а также частоту вращения электрона.

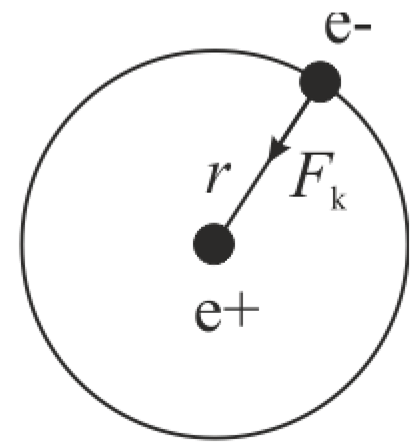
- Решение:

$$\sum \vec{F}_i = m_e \vec{a}_c = \frac{m_e v^2}{r} = F_k$$

$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

$q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$k = 9 \cdot 10^{-10}$ Н·м²/Кл²



$$\frac{m_e v^2}{r} = k\frac{q^2}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{kq^2}{m_e r}}$$

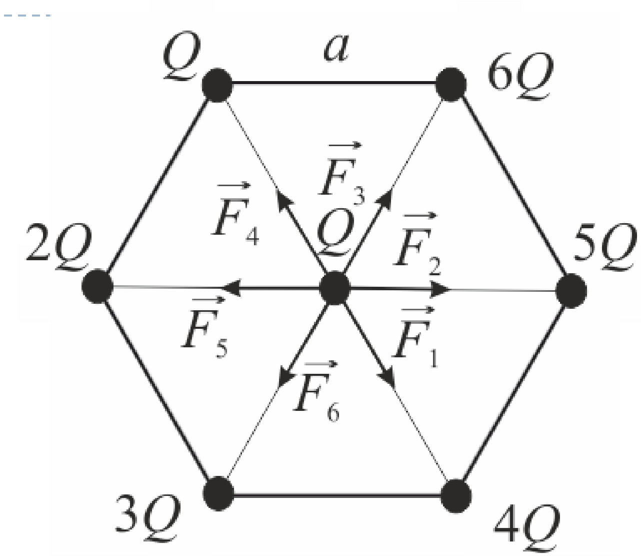
Подставляем значения: $v = 21{,}8 \cdot 10^5$ м/с.

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}, v = \omega \cdot r \Rightarrow$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r}$$

Подставляем значения: $\nu = 6{,}5 \cdot 10^{15} с^{-1}$.

Задача 3. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a=10 см расположены точечные заряды Q, $2Q$, $3Q$, $4Q$, $5Q$, $6Q$ (Q=0,1 мкКл). Найти силу F, действующую на точечный заряд Q, лежащий в плоскости шестиугольника и равноудаленный от его вершин.



- Решение:

$$F_1 = k\frac{Q^2}{r^2}; F_2 = k\frac{2Q^2}{r^2}; F_3 = k\frac{3Q^2}{r^2};...$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_4 = \vec{F}_{14} \qquad F_{14} = 3F$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_5 = \vec{F}_{25} \qquad F_{25} = 3F$$

$$\vec{F}_3 + \vec{F}_6 = \vec{F}_{36} \qquad F_{36} = 3F$$

Таким образом, имеем сумму трех векторов, угол между которыми равен 60°. При сложении двух равных векторов под углом 60° получаем равносторонний треугольник.

$$\vec{F}_{14} + \vec{F}_{36} = \vec{F}'_{25}$$

$F_{\text{res}} = 54$ мН.

$$F_{res} = F'_{25} + F_{25} = 6F = 6k\frac{Q^2}{r^2} = 6k\frac{Q^2}{a^2}$$

Задача 4. Два положительных точечных заряда Q и $4Q$ закреплены на расстоянии l=60 см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд Q_1 так, чтобы он находился в равновесии. Указать, какой знак должен иметь этот заряд для того, чтобы равновесие было устойчивым если перемещения заряда возможны только вдоль прямой, проходящей через закрепленные заряды.

- Решение:

В точке равновесия F_1=F_2.

$$F_1 = k\frac{QQ_1}{x^2} = k\frac{4QQ_1}{(l-x)^2} = F_2 \Rightarrow 4x^2 = (l-x)^2;$$

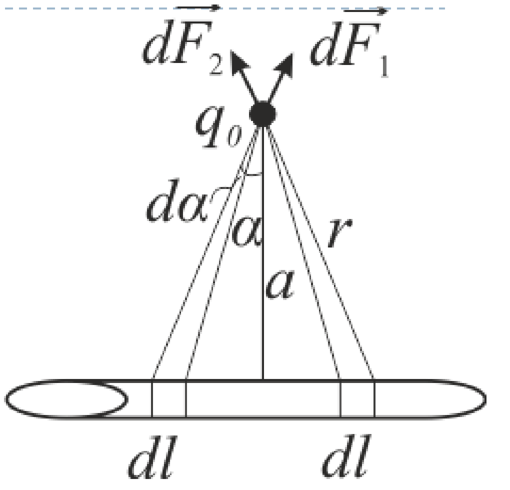
$$x > 0; (l-x) > 0; x < l \Rightarrow 2x = l - x \Rightarrow l = 3x, x = \frac{l}{3}$$

x=0,2 м – расстояние от заряда Q, 0,4 м – расстояние от заряда $4Q$.

Если заряд Q_1 – отрицательный, то при малом отклонении от положения равновесия сила притяжения к одному и закрепленных зарядов будет больше, чем к другому, значит равновесие неустойчивое.

Если заряд Q_1 – положительный, то при отклонении от положения равновесия усилится отталкивание от закрепленного заряда, к которому сместился Q_1 и ослабит отталкивание от другого, значит равновесие устойчивое.

Задача 5. Тонкая нить длиной l=20 см равномерно заряжена с линейной плотностью τ=10 нКл/м. На расстоянии a=10 см от нити, против ее середины, находится точечный заряд q_0=1 нКл. Вычислить силу, действующую на этот заряд со стороны заряженной нити.



- Решение:

$$dF = k\frac{dqq_0}{r^2}, dq = \tau dl \Rightarrow dF = k\frac{q_0\tau dl}{r^2}$$

$$dl = \frac{rd\alpha}{cos\alpha}, r = \frac{a}{cos\alpha} \Rightarrow dl = \frac{ad\alpha}{cos^2\alpha}$$

Сумма всех dF_{x1} и dF_{x2} равна нулю.

Следовательно, нужно рассмотреть лишь dF_{y1} и dF_{y2}, $|dF_1|=|dF_2|$.

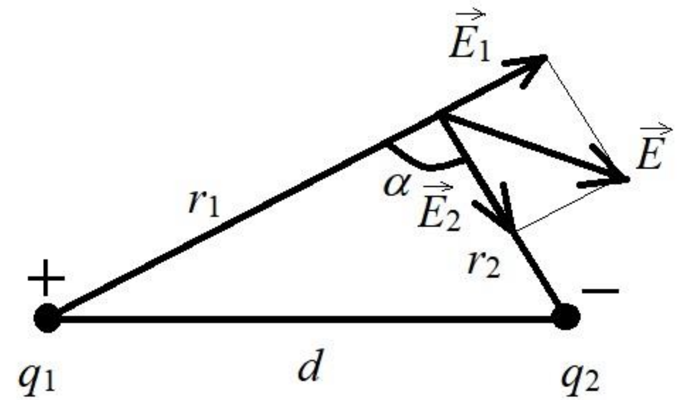
$$dF_y = dFcos\alpha = k\frac{q_0\tau dl}{r^2}cos\alpha = k\frac{q_0\tau acos\alpha d\alpha}{cos^2\alpha r^2} = k\frac{q_0\tau cos\alpha d\alpha}{a}$$

$$F_y = \int_0^\beta \frac{kq_0\tau cos\alpha d\alpha}{a} = \frac{kq_0\tau sin\beta}{a}$$

$$F = 2F_y = \frac{2kq_0 sin\beta}{a}, sin\beta = \frac{l/2}{\sqrt{a^2 + l^2/4}} = \frac{l}{\sqrt{4a^2 + l^2}} \Rightarrow F = \frac{2kq_0\tau l}{a\sqrt{4a^2 + l^2}}$$

F=1,27 мкН.

Задача 6. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами q_1=40 нКл и q_2=-10 нКл, находящимися на расстоянии d=10 см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на r_1=12 см и от второго на r_2=6 см.



- Решение:

$$E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}, E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 cos\alpha} \\ d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 cos\alpha \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}, E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - E_1E_2\frac{(d^2 - r_1^2 - r_2^2)}{r_1r_2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} - \frac{q_1q_2(d^2 - r_1^2 - r_2^2)}{r_1^2r_2^2r_1r_2}}$$

E=38,1·10^3 В/м.