1.10.2019; 3.10.2019

Занятие № 4. Условная вероятность. Независимость.

4.1. Читатель разыскивает книгу в трёх библиотеках. Вероятности того, что книга есть или отсутствует в фонде библиотеки, а также того, что она выдана или нет, одинаковы. Что вероятнее, найдёт читатель нужную книгу или не найдет?

Ответ: $0,58$.

4.2. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей хотя бы на одной выпадет 6 очков, при условии, что на всех костях выпали грани с четным числом очков.

Ответ: $\frac{19}{27}$.

4.3. Доказать неравенство $\mathbf{P}(A|B) \geqslant 1 - \frac{\mathbf{P}(\overline{A})}{\mathbf{P}(B)}$.

4.4. Доказать, что если вероятность события $\mathbf{P}(A) = 0,9$, а вероятность события B равна $\mathbf{P}(B) = 0,8$, то $\mathbf{P}(A|B) \geqslant 0,875$.

4.5. Брошено две игральных кости. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти условную вероятность того, что выпали две пятерки, если известно, что сумма выпавших очков делится на пять.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

4.6. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадет единица, если на всех трех костях выпали разные грани?

Ответ: $\frac{1}{2}$.

4.7. Из 100 карточек с числами $00; 01; 02; \ldots; 98; 99$ случайно выбирается одна. Пусть X и Y соответственно сумма и произведение цифр на выбранной карточке. Найти условную вероятность события $\mathbf{P}(X = i|Y = 0), i = 0; 1; 2; \ldots; 18$.

Ответ: $\frac{1}{19}, i = 0$; $\frac{2}{19}, i = 1, 2, \ldots, 9$; $0, i = 10, \ldots, 18$.

4.8. Известно, что при бросании 10 игральных костей появилась по крайней мере одна единица. Какова вероятность, что появились две или более единицы?

Ответ: $\mathbf{P}(A|B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}|B) = 1 - \frac{10 \cdot 5^9}{6^{10} - 5^{10}} \approx 0,6147724311714088$.

4.9. Восемь различных книг расставлены наудачу на одной полке. Найти вероятность, что две определенные книги окажутся на первых двух местах, если известно, что они стоят рядом.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

4.10. Доказать, что если $\mathbf{P}(A|B) > \mathbf{P}(A)$, то $\mathbf{P}(B|A) > \mathbf{P}(B)$.

4.11. Верно ли равенство $\mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(A|\overline{B}) = 1$?

4.12. Шесть человек садятся в лифт на первом этаже 12-этажного здания. Каждый из них может выйти с одинаковой вероятностью на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все выйдут на разных этажах при условии, что на втором и третьем этаже никто не выходил.

Ответ: $0,113804$.

4.13. Шесть пассажиров садятся на остановке в поезд, состоящий из четырех вагонов. Каждый из пассажиров может сесть с одинаковой вероятностью в любой вагон. Найти вероятность, что пассажиры сядут в один вагон при условии, что хотя бы в один вагон не сядет ни один пассажир.

Ответ: $0,00473186$.

4.14. Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет единица. Известно, что при первом испытании единица не выпала, найти вероятность того, что потребуется не менее трех бросаний.

Ответ: $\frac{5}{6}$.

4.15. Игральная кость брошена два раза. Пусть i и j числа очков, выпавших при этих испытаниях. Будут ли независимы события $A = \{i \text{ делится на } j\}$ и $B = \{i + j \text{ делится на } 2\}$?

4.16. Случайная точка $Z = (x, y)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1; 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ (т.е. вероятность любого подмножества $A \in \Omega$ (точнее, борелевского подмножества) пропорциональна площади той части A, которая попадает внутрь $\Omega : \mathbf{P}(A) = \frac{S_{A \cdot \Omega}}{S_{\Omega}}$). Рассмотрим события $A = \{x \leqslant \frac{1}{2}\}$; $B = \{y \leqslant \frac{1}{2}\}$ и $C = \{\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) < 0\}$. Показать, что любые два события из A, B, C независимы, но все три события A, B, C зависимы. Являются ли зависимыми события $A \cdot B$ и C?

4.17. Монета брошена 6 раз. Зависимы или независимы следующие события: «появилось нечетное число гербов» и «появились 5 или 6 гербов»?

4.18. Игральная кость брошена два раза. Пусть X и Y количество очков, выпавших при этих испытаниях. Рассмотрим следующие события:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \{X \text{ делится на } 2; Y \text{делится на } 3\};\\
&A_2 = \{X \text{ делится на } 3; Y \text{делится на } 2\};\\
&A_3 = \{X \text{ делится на } Y\};\\
&A_4 = \{Y \text{ делится на } X\};\\
&A_5 = \{X + Y \text{ сумма делится на } 2\};\\
&A_6 = \{X + Y \text{ сумма делится на } 3\};
\end{aligned}
$$

Найти все пары $A_i \cdot A_j$; тройки $A_i \cdot A_j \cdot A_k$ и т. д. взаимно независимых событий.

4.19. Случайная точка (x, y) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1; 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. При каких положительных значениях r независимы события $A_r = \{|x - y| \geqslant r\}$ и $B_r = \{x + y \leqslant 3r\}$?

4.20. Доказать, что если $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A|\overline{B})$, то события A и B независимы.

4.21. Пусть событие A таково, что оно не зависит от самого себя. Показать, что тогда $\mathbf{P}(A)$ равно 0 или 1.